Trabajo Fin de Máster

Introducción al concepto de derivada

Introduction to the concept of derivative

Autor/es

Raúl Alegre Martínez

Director/es

Jose María Muñoz Escolano

Facultad de Educación

Curso 2018/2019

Repositorio de la Universidad de Zaragoza – Zaguan http://zaguan.unizar.es

Tabla de contenidos

I. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

I.1. Nombra el objeto matemático a enseñar

A lo largo de este trabajo estudiaremos la derivada. Siendo más explícitos, nos centraremos en una **introducción al concepto de derivada**, poniendo la atención en el significado físico y geométrico de esta, alejándonos de las cuestiones algorítmicas y operativas que ya tienen el protagonismo en libros de texto (como veremos después).

I.2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático

Dada la localización del concepto de derivada en el currículo (*ORDEN ECD/494/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.*, 2016), no cabe duda de que este objeto tiene su lugar en el primer curso de primero de Bachillerato. Más específicamente, este material está pensado para un curso de Matemáticas I. No obstante, cabe señalar que el material sigue siendo mayormente válido para el curso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I.

I.3. ¿Qué praxeología asociada al objeto matemático pretendes enseñar?

En este trabajo seguiremos, principalmente, la línea marcada por las investigaciones del grupo cero (Azcárate, Bosch, Casadevall, & Casellas, 1996). Como veremos, esta línea de trabajo sigue ciertos principios con el objetivo de lograr un aprendizaje más sólido por parte del alumnado, tales como utilizar un enfoque gráfico antes que algebraico, enfatizar el trabajo en los conceptos del precálculo, o evitar apoyarse demasiado en el concepto de límite.

Teniendo lo anterior en cuenta, podemos desglosar más fácilmente la praxeología que proponemos.

- **Precálculo**: En esta sección, los problemas estarán relacionados con velocidades, cálculo de pendientes y con el significado de la tasa de variación media.
- **Función derivada**: En esta sección los alumnos tendrán que acercarse primero al problema del cálculo de la función derivada siguiendo un enfoque global antes que local, para terminar haciendo aproximaciones numéricas de derivadas hasta lograr desarrollar alguna expresión algebraica (lo que sentará las bases para la enseñanza de las reglas de derivación, las cuales quedan fuera de este trabajo).

II. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

Para analizar el contexto actual de la enseñanza, primero nos referiremos al currículo (*ORDEN ECD/494/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.*, 2016), donde encontramos los siguientes elementos relacionados con la derivada:

Contenidos:

- Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal.
- Función derivada. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena.

Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje Evaluables:

- **Crit.MA.3.3**. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.
  - **Est.MA.3.3.1**. Calcula la derivada de una función, usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.
  - **Est.MA.3.3.2**. Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena.
  - **Est.MA.3.3.3**. Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.

II.1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Para responder a esta pregunta, nos fijaremos en varios libros de texto:

- (Colera, Oliveira, García, & Santaella, 2012)
- (C. González García, Llorente, & Jiménez, 2005)
- (Bescós & Pena, 2002)
- (Marea Verde, 2018)

Sin entrar a analizar cada propuesta por individual, se perciben ciertos patrones.

- **Sobre el precálculo**: Se asume que este conocimiento está consolidado por parte del alumno, ya que se dedican muy pocas páginas a trabajarlo. Es común encontrar un simple problema de velocidades como único anticipo a una definición de derivada basada en un límite de tasas de variaciones medias.
- **Sobre las representaciones**: No se suelen detallar las distintas formas de percibir el concepto de tasa de variación. El énfasis está siempre en el enfoque algebraico, sin trabajar la conexión con la representación geométrica, que se comenta de pasada.
- **Sobre el concepto de límite**: Todas las propuestas analizadas se apoyan desde el primer momento en una definición de derivada algebraica apoyada sobre el concepto de límite, sin tener en cuenta el posible obstáculo epistemológico que esto supone.
- **Sobre la tangente**: Dado que no se trabaja en profundidad el aspecto geométrico, lo mismo sucede con la relación entre tasas de variación y rectas secantes, o sobre el resultado de efectuar el límite sobre estas. Del mismo modo, se pasa directamente de una concepción euclídea de tangente a una cartesiana, lo que puede suponer un obstáculo al hacer una transición tan abrupta (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019).
- **Sobre la praxeología**: La tradición escolar en torno a la derivada destaca por el excesivo papel protagonista de las técnicas, comúnmente llamadas "reglas de derivación", que normalmente los alumnos memorizan en forma de tablas.

Así, podemos resumir que la norma es introducir un problema de velocidad, a partir del cual se recuerda el concepto de tasa de variación media y se define la derivada añadiendo simplemente un límite, mientras que por el camino se han ido acompañando los párrafos con gráficas de las funciones. A partir de ese momento, el enfoque es mayoritariamente algebraico y pasa a estudiar las reglas de derivación, la función derivada, y las aplicaciones de esta.

II.2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Aquí debemos hacer una distinción. Por un lado, es común que al inicio del tema se planteen problemas relacionados con velocidades, pendientes o magnitudes que varían (podríamos decir que son problemas que se constituyen en razones del ser). Por otro lado, al final de cada tema, el conjunto de problemas y ejercicios suele ser siempre completamente descontextualizado y de naturaleza algebraica. El alumno recibe una función en forma de fórmula y tiene que realizar algunos cálculos.

Por otro lado, las técnicas protagonistas en esta unidad suelen ser las reglas de derivación, las cuáles se ofrecen sin una tecnología que las acompañe. Sin embargo, previamente sí que se enseña la técnica para el cálculo de tasas de variación, que suele estar al inicio de la unidad, donde aún hay algún intento para contextualizar lo que se enseña, por lo que suele acompañarse de alguna justificación que hace referencia a la intuición del alumno con situaciones cotidianas (problemas de velocidad). También es común ilustrar la técnica para el cálculo de la recta tangente, siendo la tecnología correspondiente la conocida ecuación de una recta y el hecho de que la derivada de una función en un punto se corresponde con la pendiente de la tangente por ese punto.

II.3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

A modo de resumen, podríamos decir que la enseñanza actual fomenta el aprendizaje de unas técnicas y su constante aplicación mecánica. Se convierte al alumno en una máquina muy capaz de aplicar un conjunto de reglas, sin que conozca exactamente de donde provienen y qué resultados ofrecen. No obstante, a continuación, se ofrecen referencias a trabajos donde se concretan estas ideas de forma más rigurosa.

Por ejemplo, se pueden clasificar las dificultades que encuentran los alumnos en el aprendizaje del cálculo en tres grandes grupos (Artigue, Douady, & Moreno, 1995):

- Asociadas a objetos básicos del cálculo (como números reales, funciones, etc).
- Asociadas al concepto de límite.

- Asociadas a la ruptura álgebra/cálculo.

También podemos encontrar trabajos que analizan el tipo de error cometidos por los estudiantes (A. González García, Muñiz Rodríguez, & Rodríguez Muñiz, 2018), donde destacan no solo errores manipulativos, sino dificultad para cambiar de estrategias ante la resolución de un problema, incapacidad para analizar funciones expresadas en forma de tabla, incapacidad para interpretar geométricamente la derivada, etc.

Con respecto al exceso de manipulaciones algebraicas, Hitt (2003) señala que "generalmente tanto los estudiantes como algunos profesores se restringen a una manipulación algebraica relativa al concepto, que produce una limitación en su comprensión". En la misma línea, encontramos trabajos que ilustran la incapacidad de los estudiantes de afrontar problemas que se salgan de lo habitual, como refleja (Selden, Selden, & Mason, 1994)

III. Sobre los conocimientos previos del alumno

III.1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno?

La derivada es uno de los conceptos centrales del cálculo, junto a la integral. Por ello, no sorprende que su dominio tenga implícito muchísimos conocimientos previos, tanto del área de análisis como del álgebra.

Una de las particularidades de nuestra propuesta es que no se necesita tener un conocimiento sólido del concepto de límite. Más bien al contrario, esta propuesta de aprendizaje de la derivada puede ser utilizada como apoyo para afianzar el aprendizaje del concepto de límite.

A continuación, enumeramos los conocimientos que debe manejar el alumno.

- Dependencia entre dos variables. Variable independiente y dependiente, dominio, imagen, gráfica, fórmula, crecimiento y decrecimiento.
- Representación de funciones sencillas: lineales, afines, parabólicas.
- Representación parcial de funciones arbitrarias dando valores.
- Lectura e interpretación de gráficos.
- Cálculo de velocidades promedio.
- Cálculo de la pendiente de una recta.
- Recta tangente.
- Operaciones algebraicas sencillas y división de polinomios.

Como vemos, algunos de los conocimientos necesarios forman parte del precálculo, al que dedicaremos bastante atención más adelante.

III.2. ¿Ha propiciado la enseñanza anterior la adquisición de esos conocimientos?

Para responder a esta pregunta podemos utilizar dos enfoques, uno teórico y otro práctico.

Desde el punto de vista teórico, basta echar un vistazo al currículo (*ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.*, 2016) de los cursos anteriores para ver si estos objetos matemáticos han sido tratados. Por ejemplo, en MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS de cuarto curso de ESO, observamos que hay un bloque íntegro dedicado a funciones, con los siguientes contenidos.

Contenidos:

- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.
- Análisis de resultados.
- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.
- Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.

De la misma manera, todas las manipulaciones algebraicas necesarias para esta unidad han sido cubiertas en cursos anteriores. Por lo tanto, parece claro que la normativa sí que especifica que estos conocidos han de ser ya conocidos por el estudiante.

Por el contrario, desde el punto de vista práctico, los estudios mencionados anteriormente nos sugieren ser escépticos ante esta realidad. Es por ello que nuestra propuesta se centra fundamentalmente en objetos del precálculo y busca afianzar un conocimiento sólido, sin llegar a abordar las cuestiones manipulativas que encontramos en los libros de texto.

III.3. ¿Con qué actividades trabajarás esos conocimientos previos?

El objetivo de la actividad inicial es hacer un análisis diagnóstico de la situación del alumnado en el momento de iniciar la unidad didáctica y orientar al alumno para que identifique los conceptos necesarios para afrontar la unidad satisfactoriamente. Para ello, se aprovechará la primera sesión para que los alumnos realicen, de forma individual y por escrito, una pequeña prueba de 25 minutos de duración.

ACTIVIDAD INICIAL

Problema 1.

Dibuja la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ y responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿Existe algún valor de x que hace que $f(x)$ alcance su valor máximo? ¿y su valor mínimo? Encuentra esos valores de x en el caso de que existan.

b) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) ¿Cuánto varía la función entre $x = 1$ y $x = 4$? ¿Cuál es la tasa de variación media en ese intervalo?

Problema 2.

a) Dibuja la gráfica de la función afín con pendiente 3 que pasa por el punto $(0, -2)$.

b) Divide el polinomio $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ por el polinomio $x^2 + 1$.

Durante la prueba, el profesor irá observando las reacciones de los estudiantes, de modo que pueda identificar los principales obstáculos que se encuentran. Tras la prueba, el profesor la corregirá en la pizarra, poniendo énfasis en los obstáculos detectados, los cuáles serán tenidos en cuenta durante el resto de la unidad, haciendo pequeñas modificaciones para reforzar los conceptos necesarios.

IV. Sobre las razones de ser del objeto matemático

IV.1. ¿Qué razón de ser vas a tener en cuenta para introducir el objeto matemático?

Recordemos que, según la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1998) denominamos **razón de ser** al campo de problemas que dan sentido a un nuevo objeto de saber (en este caso, la derivada). Más específicamente, la razón de ser debe estar compuesta por problemas que puedan ser enunciados en términos de objetos de saber ya aprendidos anteriormente, pero que motiven la necesidad de introducir los distintos aspectos del nuevo objeto de saber.

En nuestra propuesta, las razones de ser vendrán dadas principalmente por conceptos del precálculo.

- **Problemas de velocidad**. Problemas en los cuáles ha de trabajarse la interpretación de la velocidad como variación de la magnitud espacio con respecto a la magnitud tiempo, utilizando distintas representaciones, y pasando de los conceptos intuitivos que el alumno ya posee, a una construcción de un concepto que nos acerque al concepto de límite.
- **Problemas de pendientes**. Problemas en los que, bajo una representación geométrica, se estudia el concepto de pendiente. Se parte del concepto intuitivo de inclinación de una superficie hasta construir el concepto de pendiente de una curva en un punto, pasando por la pendiente promedio entre dos puntos.
- **Problemas de tasas de variación**. Problemas en los que se generaliza la necesidad de estudiar el ritmo de cambio de una magnitud dependiente de otra, aunque no se puedan interpretar naturalmente como velocidad o como pendiente. En esta categoría entrará el estudio de magnitudes (distintas al espacio) que dependen del tiempo como dependencias de distinta naturaleza.

IV.2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Como comentábamos anteriormente, la derivada es uno de los pilares del Cálculo, junto a la integral. Por lo tanto, cualquier repaso histórico debe mencionar tanto a Isaac Newton como Gottfried Wilhelm Leibniz, considerados los inventores del cálculo, pues ambos lo desarrollaron de forma independiente a mitades del siglo XVII (Katz, 2009).

Sin embargo, el origen de los objetos que forman parte del cálculo se remonta más atrás. Por ejemplo, Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī ya utilizaba la derivada de polinomios cúbicos para hallar extremos (Rashed, 2013).

Ahora bien, para ser más rigurosos, debemos referirnos a (Pino-Fan, Godino, & Font, 2011), donde se realiza un recorrido histórico-epistemológico del desarrollo de la derivada, identificando 9 configuraciones epistémicas, que enumeramos a continuación.

- Problema 1: La tangente en la matemática griega
- Problema 2: Métodos algebraicos para hallar tangentes
- Problema 3: Métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes
- Problema 4: Sobre la variación en la edad media
- Problema 5: Concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes
- Problema 6: Las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos
- Problema 7: El Cálculo de fluxiones
- Problema 8: El Cálculo de diferencias
- Problema 9: La derivada como límite

La Figura 1 muestra las dependencias entre estas configuraciones epistémicas.

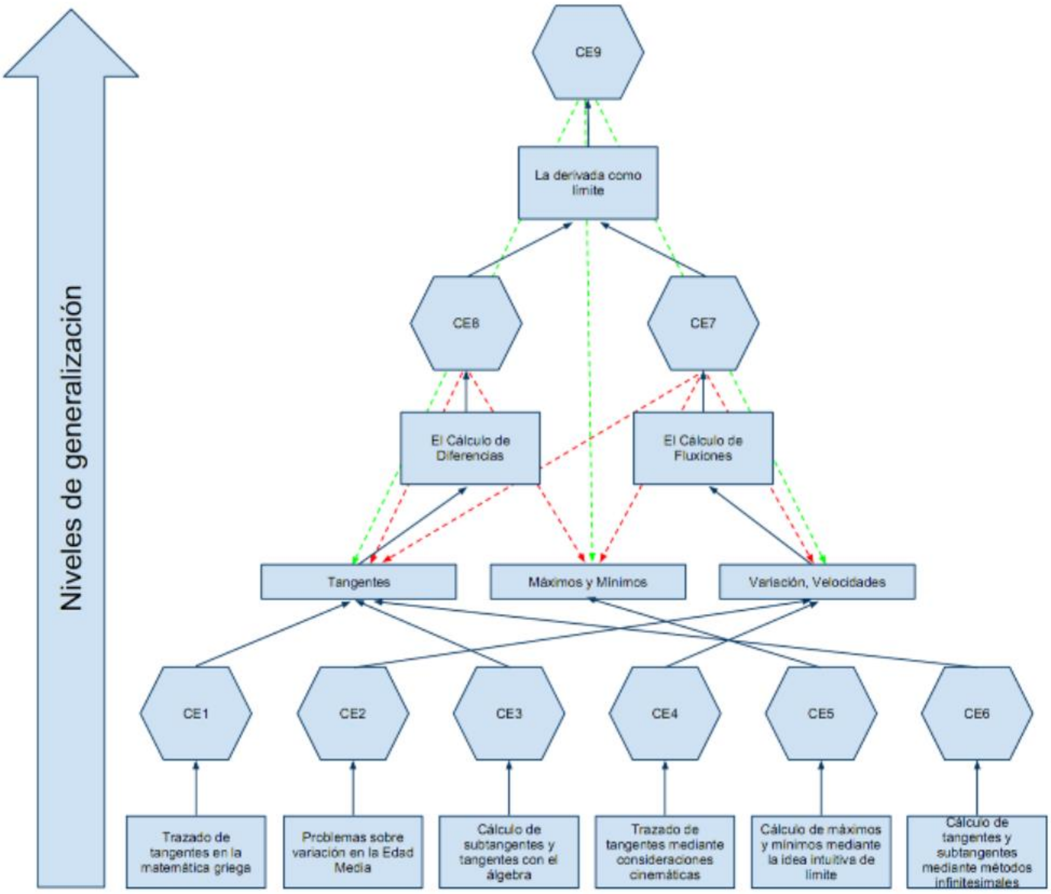


Figura 1. Configuraciones Epistémicas de la Derivada (Pino-Fan et al., 2011)

V. Sobre el campo de problemas

V.1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Para clasificar los problemas que presentaremos, primero tenemos que tener claro que nuestra propuesta está claramente estructurada en dos fases.

- **Fase 1: El precálculo**. En esta fase se trabajarán los conceptos sobre los cuáles se construye la idea de derivada, sin necesidad de mencionarla explícitamente (análogamente, lo mismo sucede con el paso al límite). A su vez, esta fase está dividida en tres partes.
    - La velocidad.
    - La pendiente de una curva.
    - La tasa de variación.
- **Fase 2: La función derivada**. En esta fase se trabajará el concepto de función derivada a partir de los conceptos del precálculo. Más específicamente, primero se trabajará la función derivada como concepto global, enfatizando su representación gráfica. Más adelante, se finalizará con el cálculo numérico de valores concretos de la función derivada, así como su expresión algebraica.

Campo de problemas 1. La velocidad

El objetivo de este campo de problemas es doble. Por un lado, se trabajará a partir de un concepto intuitivo (como lo es la velocidad que marca el velocímetro o la velocidad media de un trayecto) y se aprovechará para empezar a construir el concepto de velocidad instantánea. Por otro lado, se trabajarán distintas formas de representación de una misma situación para que el alumno construya las conexiones entre distintos objetos (tablas, gráficas, frases, etc).

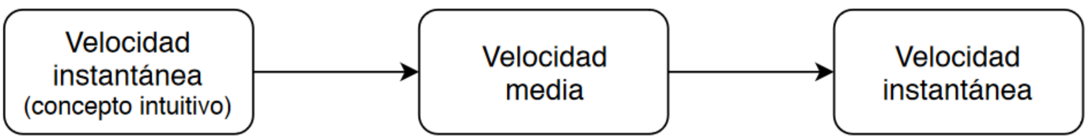
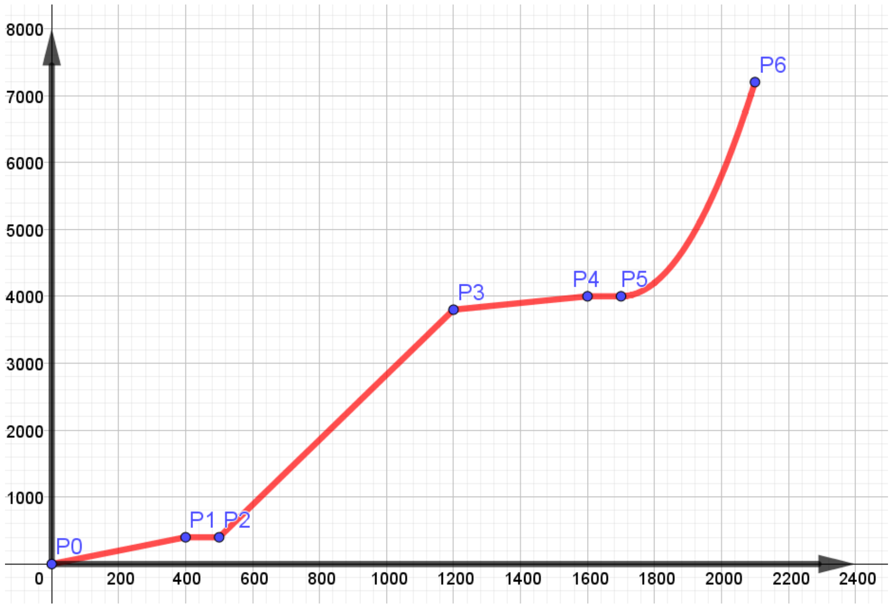


Figura 2. Evolución de la concepción de velocidad del estudiante (Azcárate et al., 1996)

PROBLEMA 1.

Un estudiante, para ir a la escuela, necesita coger todos los días el tranvía y hacer trasbordo en un autobús. La siguiente gráfica muestra su recorrido durante el último día.



Donde los puntos indicados corresponden a los siguientes eventos:

- P0: Sale andando.
- P1: Llega a la parada del tranvía y espera.
- P2: Llega el tranvía y se monta.
- P3: El tranvía llega a su destino y camina hacia la parada de bus.
- P4: Llega a la parada de bus y espera.
- P5: El bus llega a la parada y se monta.
- P6: El bus llega a su destino.

Responde a las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuánto ha durado el viaje?

b) ¿Cuál es la distancia total recorrida?

c) ¿Cuál es la velocidad media durante el viaje?

d) ¿Cuál ha sido la velocidad media que ha llevado el tranvía? ¿Y el autobús?

e) ¿En qué tramo ha andado más rápido el estudiante? ¿Para llegar a la parada del tranvía o para la parada del autobús? ¿En cuál de esos dos tramos está la gráfica más inclinada?

El siguiente problema busca trabajar la traducción entre las representaciones tabular, gráfica y verbal. Además, también se busca reforzar la relación entre la velocidad instantánea y la pendiente ilustrando una situación en la que hay dos móviles y hay que comparar su movimiento. Por último, se introduce la idea de que la velocidad instantánea se obtiene tomando velocidades medias en instantes muy próximos.

PROBLEMA 2. Adaptado de (Azcárate et al., 1996)

Para comprobar si un coche supera la velocidad permitida de 25 m/s en cierto tramo, se toman varias fotografías (una cada medio segundo) y se mide la distancia del coche en cada fotografía a un punto de referencia. La siguiente tabla muestra los datos para 2 coches.

Instante (s)	**0**	**0.5**	**1**	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**	**3.5**	**4**
Coche 1 (m)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Coche 2 (m)	0	1	4	9	16	25	36	49	64

a) Dibuja una gráfica espacio-tiempo indicando el recorrido de los dos coches.
b) ¿Qué coche ha tenido una mayor velocidad media durante todo el trayecto?
c) ¿Qué coche ha ido más rápido en promedio entre t=0 y t=2? ¿Qué gráfica tiene mayor pendiente?
d) ¿Qué coche ha ido más rápido en promedio entre t=2 y t=3? ¿Qué gráfica tiene mayor pendiente?
e) ¿Qué coche ha ido más rápido en promedio entre t=3 y t=4? ¿Qué gráfica tiene mayor pendiente?
f) ¿Cómo calcularías la velocidad aproximada que indica el velocímetro cuando t=4?

Campo de problemas 2. La pendiente de una curva.

En el campo de problemas anterior, el foco estaba en construir el concepto de velocidad instantánea como algo cinemático. Si bien es cierto que la relación de esta cantidad con la pendiente de la gráfica espacio-tiempo podía intuirse, ésta no se trabajaba por completo. Por el contrario, en este campo de problemas, el aspecto geométrico pasa a ser el protagonista.

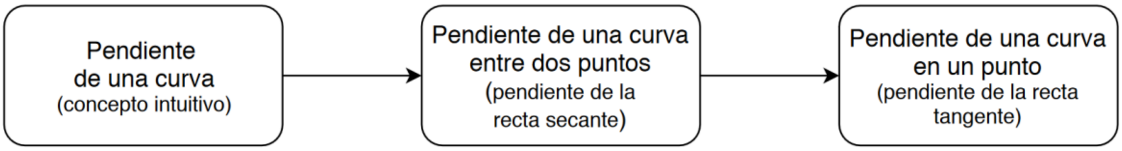
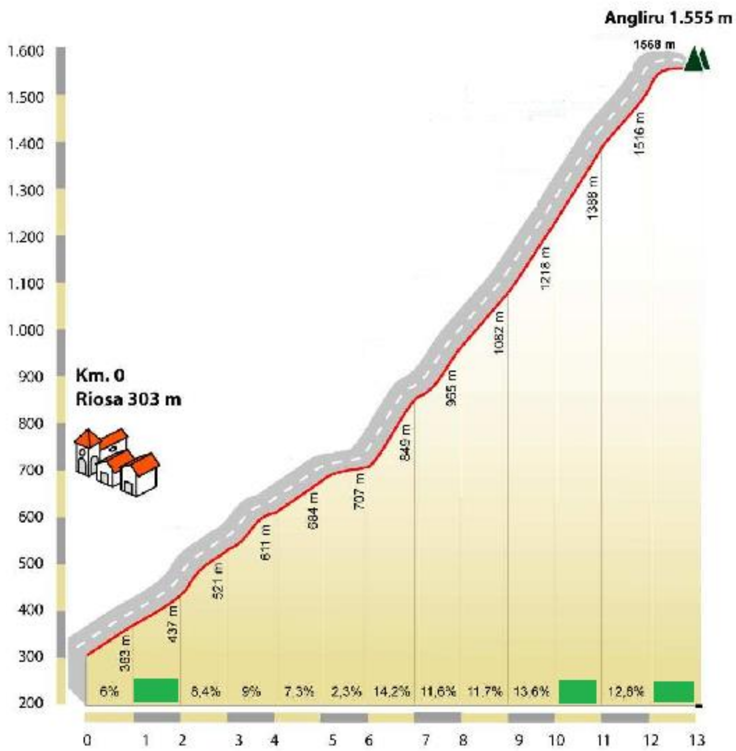


Figura 3. Evolución de la concepción de pendiente del estudiante (Azcárate et al., 1996)

Para ello, partiremos de la idea intuitiva de pendiente de una curva, pasando por trabajar el concepto de pendiente de una curva entre dos puntos (como la pendiente de la correspondiente recta secante).

PROBLEMA 3.

El Angliru es uno de los puertos más famosos que habitualmente se recorren en La Vuelta Ciclista a España, conocido por su extrema dureza. La siguiente imagen describe el perfil de la montaña.



Responde a las siguientes cuestiones.

a) ¿Qué tramo tiene mayor pendiente, la primera mitad o la segunda mitad?

b) En la parte inferior de la figura se describen las pendientes de cada tramo. Sin embargo, 3 pendientes han sido borradas. ¿Puedes decir cuál de las 3 será la pendiente más alta sin necesidad de calcularlas? ¿Por qué? Calcula las pendientes y comprueba el resultado.

c) ¿Cuál es la longitud del puerto? ¿Cuál es su altitud? ¿Qué pendiente promedio tiene?

d) En torno al kilómetro 10.8 se encuentra la conocida como *Cueña les Cabres*, donde el puerto tiene las pendientes más duras. Sabiendo que la altitud en ese punto exacto es de 1300 metros, y que la altitud 10 metros más adelante (kilómetro 10.81) es de 1302.3 metros, ¿puedes estimar la pendiente en ese punto?

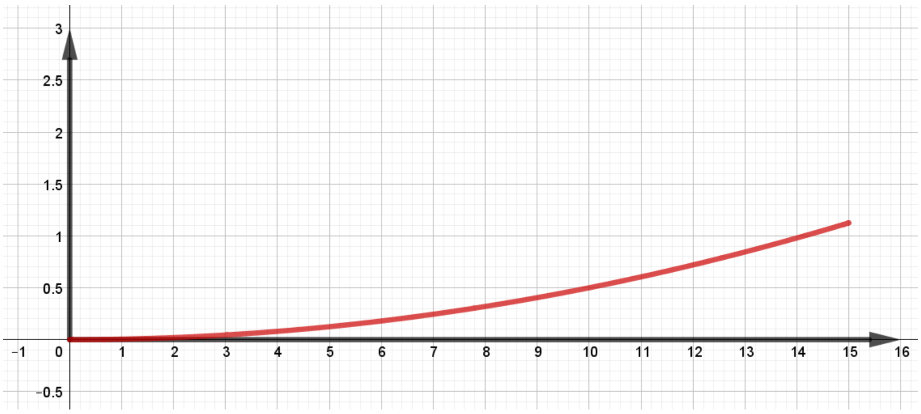
El siguiente problema busca enfatizar el concepto de pendiente en un punto.

PROBLEMA 4.

Un patinete eléctrico tiene las siguientes especificaciones.

- Velocidad máxima: 25 km/h.
- Autonomía: 30 km.
- Pendiente máxima: 14%.

Se quiere utilizar para subir una rampa que tiene el siguiente perfil:



Que puede expresar aproximadamente como $y = 0.005 \cdot x^2$, donde $x = 0$ y $x = 15$ corresponden al inicio y final de la rampa, respectivamente.

a) ¿Cuál es la altura total que tiene que superar el patinete?

b) ¿Cuál es la pendiente promedio de la rampa? ¿Crees que es posible subirla utilizando el patinete?

c) ¿Cuál es la pendiente de los últimos 5 metros? ¿En los últimos 2 metros? ¿En el último metro? ¿En los últimos 10 centímetros? ¿Y al final de la rampa? ¿Cómo será la gráfica en esos últimos 10 centímetros?

Campo de problemas 3. La tasa de variación.

Los dos campos de problemas anteriores han tratado los enfoques cinemático y geométrico de este concepto más amplio. El objetivo que se persigue con este campo de problemas es asentar la relación entre los conceptos anteriores y extender el significado a otros tipos de magnitudes.

PROBLEMA 5. Adaptado de (Azcárate et al., 1996)

Una pequeña empresa se dedica a la fabricación de pins. El coste de producción de cada nuevo encargo de pins viene dado por:

$$C = 50 + \ 0.1n + 1.5\sqrt{n}$$

Donde n es el número de pins fabricados y C el coste total en Euros.

a) ¿Cuál es el coste de fabricar un encargo de 25 pins ¿Y de 100, 1.000 y 10.000 pins?

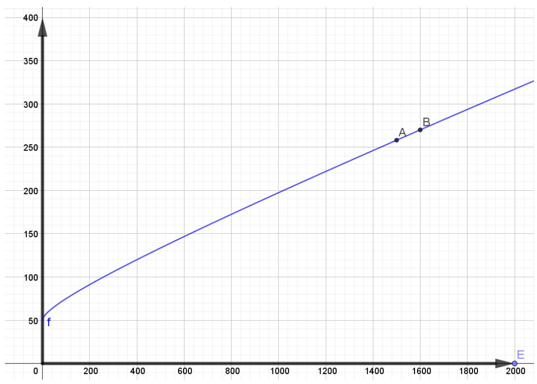
b) Calcula el coste medio por unidad en cada uno de los casos del apartado anterior.

c) Calcula la diferencia de coste entre un encargo de 25 pins y uno de 26 pins, o lo que es lo mismo, el coste de fabricar un pin más cuando llevamos fabricados 25. Este valor recibe el nombre de coste marginal para una producción de 25 pins.

d) ¿Cuál es el coste marginal para un encargo de 100 pins, de 1.000 y de 10.000? ¿Y de 1 pin?

e) Si llevamos fabricados 1.500 pins de un cierto encargo, pero en el último momento el pedido aumenta en 100 unidades, ¿cuál es el coste promedio de cada pin extra?

f) La siguiente figura ilustra la relación gráfica entre el número de pins y el coste de fabricación.



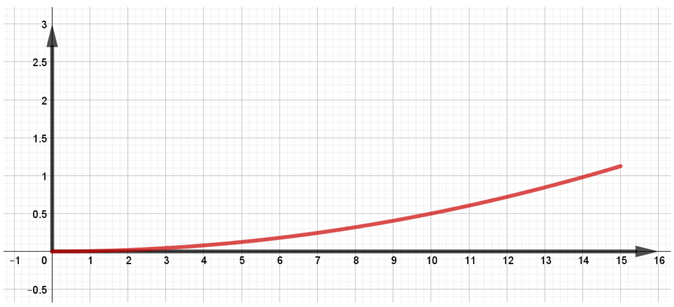
Calcula la pendiente de la recta secante entre n=1500 y n=1600. Compárala con el resultado del apartado anterior. ¿Qué está sucediendo?

Campo de problemas 4. La función derivada.

Los campos de problemas anteriores han culminado con la consolidación del concepto de tasa de variación media. Sin embargo, hasta ahora este concepto se trabajaba de forma puntual. En este campo de problemas se pretende construir la función derivada como concepto global. Para ello, se aprovecharán las TIC para la construcción de la función derivada, comenzando por cocientes de diferencias finitas y aprovechando las ventajas que estos medios ofrecen para llevar el paso al límite.

PROBLEMA 6.

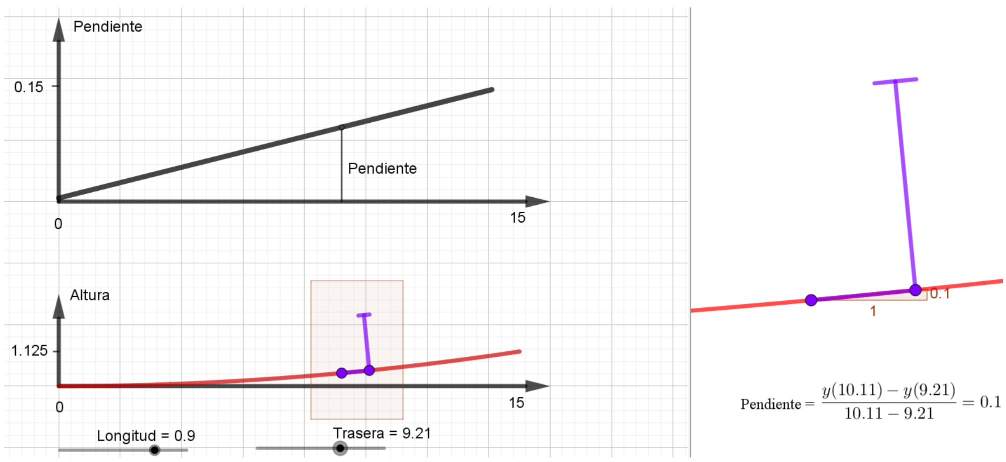
Tenemos un patinete con el que nos queremos enfrentar a un recorrido con el siguiente perfil, dado por $y = 0.005 \cdot x^2$



a) ¿En qué punto crees que será más elevada la pendiente? ¿En qué tramos la pendiente es positiva? ¿Dónde vale cero la pendiente?

b) Aproxima la pendiente en los puntos x=0, 4, 8, 12, y 15 cogiendo puntos suficientemente próximos.

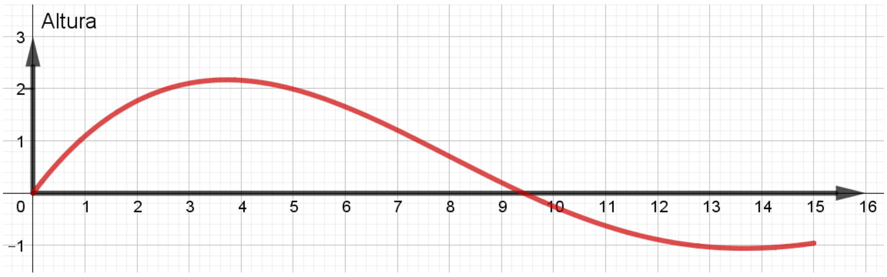
c) Utiliza GeoGebra para calcular la pendiente que soportará el patinete en cada punto teniendo en cuenta que sus dos ruedas se encuentran a 90 cm de distancia.



d) Calcula la pendiente exacta con GeoGebra utilizando el deslizador para hacer que las ruedas estén cada vez más cerca.

e) Compara el resultado del apartado anterior con tus predicciones en el apartado a) ¿Qué relaciones ves entre la gráfica de una función y su derivada?

Repite los apartados a), d) y e) para la siguiente curva.



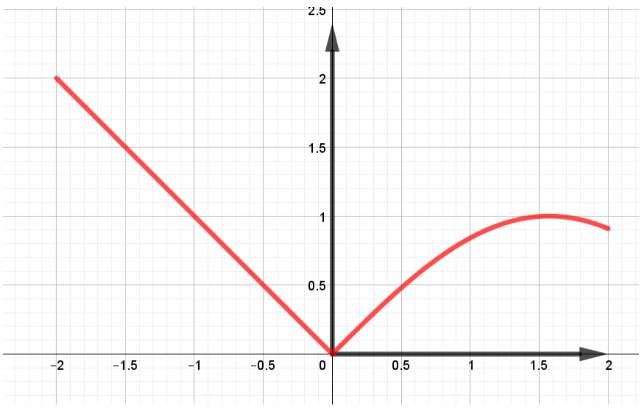
El siguiente problema busca ilustrar lo que sucede al inspeccionar localmente una función, lo que nos recuerda que no todas las funciones son derivables y la necesidad de una definición local.

PROBLEMA 7.

Considera la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ \sin x\,, & x \geq 0 \end{cases}$$

Cuya gráfica se muestra en la siguiente figura.



Sabiendo que $f(1) \approx 0.8414$ y $f'(1) \approx 0.5403$, responde a las siguientes cuestiones.

a) Haz un esbozo de la gráfica de $f(x)$ cuando x varía entre 0.9 y 1.1. ¿Cuál es la pendiente de la función en ese intervalo?

b) Repite el proceso, pero dejando que x varíe entre 0.99 y 1.01. ¿Qué forma tiene la gráfica de la función en ese intervalo? ¿Y qué pendiente promedio?

c) Según el apartado anterior, cerca del 1, la gráfica de la función se parece mucho a la de una recta. Calcula la ecuación de esta recta utilizando la expresión $y - y_0 = m(x - x_0)$. Aproxima el valor de $f(1.005)$ utilizando esa aproximación y compárala con el valor exacto.
d) ¿Qué sucede si estudiamos la gráfica de $f(x)$ cuando x varía entre -0.1 y 0.1? ¿Qué puedes decir de la pendiente? ¿Y cuando x varía entre -0.01 y 0.01 ?
e) Explica qué diferencias hay entre el 0 y el 1 para esta función.

Campo de problemas 5. Cálculo de la derivada.

En este campo de problemas retomamos los problemas comúnmente presentes en los libros de texto. La diferencia aquí es todo el trabajo previo en asentar los conceptos del precálculo y en dar una idea precisa del significado global de la función derivada. Con esos precedentes, en esta sección se busca dar respuesta a la siguiente cuestión: ¿Cuál es el valor exacto de esta "función derivada" en cada punto?

Para ello, se utiliza un primer acercamiento numérico donde se realiza el paso al límite, el cual viene seguido de uno algebraico.

PROBLEMA 8. Adaptado de (Azcárate et al., 1996)

Queremos calcular la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = x^2$ en $x = 1$. Para ello:

a) Dibuja la gráfica de la función en el intervalo [0, 1.5]. Hazlo en papel milimetrado.
b) Calcula la pendiente de la recta que corta a la gráfica (recta secante) en los puntos $x = 1$ y $x = 1.5$.
c) Por en el resultado obtenido en el apartado anterior en el lugar que le corresponda en la tabla siguiente. Competa la tabla haciendo lo mismo para otras rectas secantes de modo que corten a la gráfica todas en $x = 1$ y otro punto de corte cercano a 1.

x	1.5	1.1	1.01	1.001
$f(x)$				
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$				

PROBLEMA 9. Adaptado de (Azcárate et al., 1996)

En el problema anterior has tenido que calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ en $x = 1$ haciendo pendientes de rectas secantes, dadas por $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, cogiendo valores de x cada vez más próximos a 1.

a) En la expresión anterior que nos da la pendiente, sustituye $f(x) = x^2$ y $f(1) = 1$. De este modo obtendrás un cociente de polinomios. Haz la división de estos dos polinomios.

b) Utiliza esta expresión más simple para comprobar los valores de la tabla anterior.

c) ¿Sabrías calcular el valor de esta pendiente cuando x tiende a 1 sin necesidad de hacer aproximaciones?

d) Repite este procedimiento para calcular la pendiente en $x = a$ en lugar de $x = 1$.

V.2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a surgir con los problemas?

Como en todo aprendizaje de una técnica, el estudiante pasará por varias fases, desde el primer encuentro hasta el momento de evaluación de la técnica. Aquí repasaremos por encima la evolución de las técnicas que utilizarán los alumnos, aunque las estudiaremos más en detalle en la próxima sección.

- **Campo de problemas 1: La velocidad**. La técnica central de este campo de problemas es el cálculo de la velocidad partir de la información espacial en dos instantes determinados (los cuáles pueden ser muy próximos). Es de esperar que el alumnado comience recurriendo a fórmulas aprendidas de memoria como $v = e/t$, pero se espera que acaben siendo capaces de hacer estos cálculos interpretando directamente la información de forma verbal, tabular o gráfica, relacionando la velocidad con la pendiente de la recta secante en este último caso.
- **Campo de problemas 2: La pendiente de una curva**. La técnica central en este campo de problemas es la de saber leer pendientes partiendo de una representación gráfica. Para ello, se evolucionará desde una primera estimación intuitiva hasta una fórmula algebraica que los alumnos construyan, pasando por

la construcción geométrica del triángulo que determina la pendiente entre dos puntos.

- **Campo de problemas 3**: **La tasa de variación**. En este campo de problemas ejercitarán el cálculo de tasas de variación partiendo de distintas representaciones de los datos. Aquí no hay una evolución de la técnica, pues es la misma que en los campos anteriores, por lo que simplemente estaríamos ante un momento de institucionalización.
- **Campo de problemas 4: La función derivada**. En este campo de problemas comenzarán estimando las funciones derivadas calculando pendientes en varios puntos del dominio. A continuación, utilizarán las TIC para este proceso, que en algunos casos podrá ser acompañado por un soporte algebraico. También relacionarán gráficas de funciones con gráficas de sus funciones derivadas, primero de forma intuitiva, y más tarde identificando patrones (extremos relativos y derivadas que se anulan, intervalos crecientes y derivadas positivas, etc).
- **Campo de problemas 5: Cálculo de la derivada**. En este campo de problemas ejercitarán el cociente de diferencias finitas y el correspondiente paso al límite para valores concretos de la función. Más adelante, darán un paso en la abstracción algebraica para calcular el valor de la función derivada en un punto cualquiera.
- **Técnicas transversales**: En todo momento los alumnos tendrán que practicar su habilidad para comprender datos de un enunciado que puede presentar la información en distintas representaciones, y han de traducir a otras representaciones distintas (siendo la representación gráfica el objetivo final en muchas ocasiones).

VI. Sobre las técnicas

VI.1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

A continuación, enumeramos algunos tipos de ejercicios. Pueden encontrarse ejemplos concretos en el Anexo II.

- **Campo de problemas 1: La velocidad**. Dada una gráfica o una tabla espacio-tiempo:
    - Calcular tiempos y distancias requeridas para un trayecto.
    - Calcular la velocidad promedio entre dos instantes definidos.
    - Aproximar la velocidad que marca el velocímetro.
    - Comparar las velocidades de dos móviles.

- **Campo de problemas 2: La pendiente de una curva**. Dado el perfil de un recorrido de montaña, o una tabla altura-distancia:
    - Calcular distancias o desniveles totales.
    - Calcular la pendiente promedio entre dos puntos definidos.
    - Aproximar la pendiente en un punto concreto.

- **Campo de problemas 3: La tasa de variación**. Dada la relación entre dos magnitudes arbitrarias:
    - Calcular los cambios que sufre una magnitud entre dos situaciones.
    - Calcular la tasa de variación entre dos puntos.
    - Aproximar la tasa de variación instantánea en un punto concreto.

- **Campo de problemas 4: La función derivada**.:
    - Dada la gráfica de una función, construir la función pendiente en GeoGebra realizando aproximaciones finitas y luego un paso al límite.
    - Dada la gráfica de una función, estimar la gráfica de su función derivada calculando el valor en varios puntos y, por separado, a mano alzada.

  - Dadas varias gráficas de funciones y sus derivadas de forma desordenada, identificar las parejas.
  - Dada la gráfica de una función pendiente, esbozar la gráfica de la función original.

- **Campo de problemas 5: Cálculo de la derivada**. Dada una función (expresada algebraicamente):
  - Aproximar el valor de la derivada en un punto concreto por medio de cocientes incrementales.
  - Para una función polinómica, calcular la expresión de la función derivada haciendo la división de polinomios y el correspondiente paso al límite.

VI.2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

A lo largo de toda la unidad didáctica, aparecen algunas técnicas transversales como son la creación y lectura de gráficas, así como la interpretación de enunciados verbales que pueden estar acompañados de datos en otros formatos.

Adicionalmente, los tres primeros campos de problemas buscan ilustrar tres caras de una misma técnica, el cálculo de la tasa de variación media (y, de forma tímida, de la tasa de variación instantánea, tras hacer el paso al límite). Por lo tanto, se puede observar la progresión que hace la técnica al observar los distintos escenarios en los que se utiliza.

Los dos últimos campos de problemas, por el contrario, ilustran técnicas diferentes. En el de la función derivada, la principal técnica que aparece es producir la gráfica de una función derivada a partir de la gráfica de una función (y viceversa en casos más simples), lo que incluye la identificación de ciertas relaciones entre ambas gráficas (hablamos de los extremos relativos y los ceros de la derivada, o de los intervalos de crecimiento y el signo de la derivada).

Finalmente, el último campo de problemas enseña dos técnicas claramente marcadas. Hablamos de la aproximación al valor numérico de la función derivada en un punto, haciendo cocientes incrementales con intervalos cada más pequeños. Esto alcanza su culminación con la técnica correspondiente al cálculo algebraico de la función derivada, siguiendo el mismo enfoque de la aproximación numérica, pero poniendo más énfasis en la manipulación algebraica y formalizando el paso al límite.

VII. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

VII.1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

En nuestra propuesta las actividades han sido diseñadas con el objetivo de que sea el alumno el que construya sus concepciones actualizando aquellas que ya conoce.

Esta decisión nos obliga a tomar un acercamiento poco convencional a la enseñanza de la derivada, donde resulta que el concepto de límite (usualmente central), adquiere un papel secundario. Por otro lado, una agradable consecuencia es que los razonamientos que justifican las técnicas a menudo pueden etiquetarse como "intuición" o "conocimientos previos".

Siendo más específicos, podemos desgranar los distintos tipos de razonamiento según el campo de problemas como sigue.

- **Campo de problemas 1: La velocidad**. En este caso los razonamientos son intuitivos y están basados en las concepciones previas sobre velocidad que marca un velocímetro o sobre velocidad media asociada a un trayecto fijado.
- **Campo de problemas 2**: **La pendiente de una curva**. En este caso, las justificaciones se vuelven a apoyar en las concepciones previas que los alumnos poseen de pendiente como "inclinación de una curva".
- **Campo de problemas 3: La tasa de variación.** En este caso los razonamientos se hacen aludiendo a las concepciones construidas en los dos campos de problemas inmediatamente anteriores.
- **Campo de problemas 4: La función derivada**. En este caso los razonamientos se basan, por un lado, en todas las concepciones del precálculo desarrolladas en los tres primeros campos de problemas. Por otra parte, el resto de argumentos que se utilizan son de naturaleza gráfica, por lo que se apoyan en la capacidad del alumno de manipular gráficos adecuadamente, junto al apoyo de las TIC.
- **Campo de problemas 5: Cálculo de la derivada**. En este campo de problemas, los razonamientos vuelven a apoyarse en las concepciones del precálculo y la interpretación de una gráfica. Sin embargo, ahora hay que justificar también el

paso al límite, argumentado en el campo de problemas anterior. Por último, las manipulaciones necesarias para el cálculo algebraico de la función derivada no son nuevas para el alumno, puesto que ya conoce la división euclídea de polinomios.

VII.2. ¿Quién va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

Las actividades están diseñadas para que sea el propio alumno el que justifique las técnicas, bajo la guía del profesor. En cualquier caso, el profesor siempre realizará una labor no sólo de supervisión, sino también de refuerzo, justificando las técnicas al terminar las actividades donde estas aparecen. De esta manera, se incentiva el trabajo autónomo del alumno, aunque el profesor es quien se encarga de poner el broche final, antes de pasar al momento de institucionalización.

VII.3. Diseña el proceso de institucionalización del objeto matemático.

El proceso de institucionalización tiene lugar tras los ejercicios de aplicación de la técnica, y el profesor es el encargado de orquestarlo. Para contextualizar el proceso de aprendizaje, en la Figura 4 podemos observar las distintas fases con los momentos de estudio de la técnica incorporados y los protagonistas. En la próxima sección se describe en más detalle la metodología empleada.

VIII. Sobre la metodología

La estructura de una clase queda detallada en la Figura 4, donde hemos superpuesto los momentos de estudio de la técnica (Cid Castro & Muñoz Escolano, s. f.).

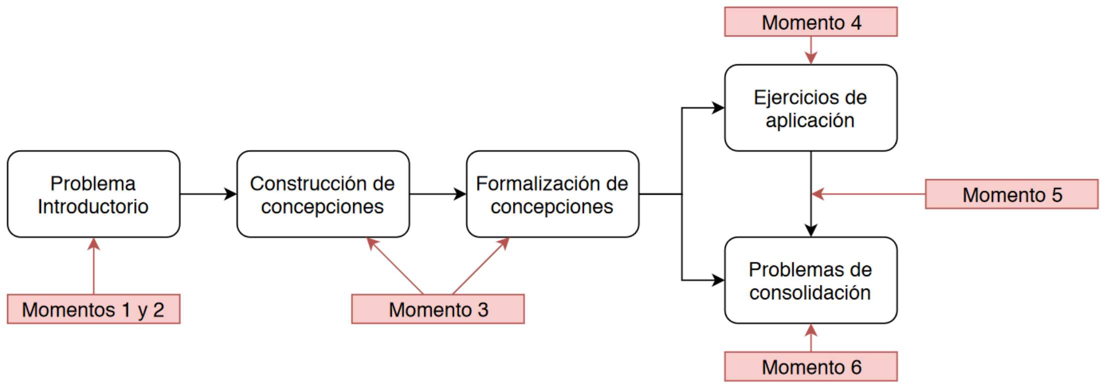


Figura 4. Estructura de la clase, adaptación de (Azcárate et al., 1996)

Como se adelantaba en la sección anterior, el alumno es el protagonista en los momentos 1 y 2, inicio del 3 y el 4. Obviamente, el profesor da apoyo y hace seguimiento en todo momento, pero su protagonismo queda restringido al final del momento 3, y a los momentos 5 y 6. Para armonizar esta dinámica, se pueden tener en cuenta las prácticas de intervención docente presentadas en (Stein & Smith, 2018)

Como se ha podido observar a lo largo del documento, nuestra propuesta se basa en *enseñar a través de la resolución de problemas*, apoyados firmemente en el uso de *worked examples* cuidadosamente diseñados, de modo que la atención del alumno sea dirigida apropiadamente a los aspectos que nos interesan y reducir así la carga cognitiva del alumnado (Ward & Sweller, 1990).

Con respecto a la gestión del aula, optamos por un enfoque híbrido, donde se respetan elementos más tradicionales, pero donde también nos atrevemos con propuestas más innovadoras, que incentivan el aprendizaje cooperativo y el uso de las TIC. Más específicamente:

- Para los problemas encargados de iniciar un campo de problemas desconocido, propondremos que los estudiantes se junten en pequeños grupos. Creemos que, en esta fase exploratoria, un acercamiento a los problemas basado en equipos puede ser beneficioso para el rendimiento y la actitud del alumnado (Zakaria, Chin, & Daud, 2010), (Heller, Keith, & Anderson, 1992).
- Para los problemas encargados de iniciar un campo de problemas asociado a la fase del precálculo (donde los alumnos deberían dominar los contenidos), creemos conveniente que trabajen de forma individual para corroborar que tienen los conocimientos necesarios y sean capaces de detectar sus fallos.
- Para los ejercicios de aplicación, se propone de nuevo un modelo híbrido, donde los alumnos comienzan trabajando por grupos, pero han de terminar de forma individual.

IX. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

En esta sección vamos a describir una propuesta que cubra todas las actividades que hemos planteado hasta ahora. Sin embargo, hemos de entender que esta secuenciación admite modificaciones en la medida de que puede aumentarse la carga sobre los ejercicios de aplicación o los problemas de consolidación, según el profesor considere necesario mientras observa el progreso del grupo.

- **Sesión 1: Introducción**. En esta damos arranque a la unidad didáctica. El objetivo de la sesión es informativo en un doble sentido. Por un lado, el profesor pondrá a los alumnos en contexto para que sepan lo que les espera en las próximas sesiones y lo que necesitan saber. Por otro lado, se planteará la *ACTIVIDAD INICIAL* que planteamos al principio de esta propuesta, que nos permita conocer el nivel de partida del grupo.
- **Sesión 2: La velocidad I**. En esta sesión, el *PROBLEMA 1* es el absoluto protagonista. El objetivo de la sesión es que los alumnos se familiaricen con el concepto de velocidad, alejándose de posibles viejas manías (como el uso indiscriminado de la fórmula $v = e/t$) y se empiecen a sentir cómodos con el tratamiento gráfico de algunas magnitudes y el uso implícito de tasas de variación medias.
- **Sesión 3: La velocidad II**. En esta sesión se propone realizar algún ejercicio para consolidar las técnicas vistas en la sesión anterior. También se trabajará el *PROBLEMA 2*, donde se trabaja la traducción entre una representación tabular y gráfica. Además, aquí se empieza a apreciar la diferencia entre velocidad promedio y velocidad instantánea. Por último, también aparece por primera vez la relación entre la velocidad y la pendiente de la gráfica.
- **Sesión 4: La pendiente I**. Dejamos atrás la velocidad para centrarnos en la pendiente de una curva. Los estudiantes percibirán que, pese a cambiar el campo de problemas, las técnicas empleadas parecen las mismas (porque lo son). Esta vez el absoluto protagonista es el *PROBLEMA 3*. A lo largo de este problema se hace una transición como la indicada en Figura 3 ya que se parte de

una concepción intuitiva de pendiente que da lugar al cálculo de una pendiente promedio y acaba con una aproximación a la pendiente en un punto.

- **Sesión 5: La pendiente II**. En esta sesión el objetivo será hacer algún ejercicio que consolide las técnicas que han surgido durante la sesión anterior. A continuación, se propone el *PROBLEMA 4*, que pone el foco en la distinción entre pendiente promedio y pendiente en un punto, sugiriendo técnicas para calcular esta última.
- **Sesión 6: La Tasa de Variación**. En esta sesión se abandona el enfoque geométrico de la pendiente y da un paso en el nivel de abstracción con el *PROBLEMA 5*. Una vez más se introduce la idea de tasa de variación y se vuelve a relacionar con la pendiente de la gráfica. Si sobrara tiempo, se recomienda hacer más ejercicios de este tipo.
- **Sesión 7: La función derivada I**. Aprovechando el PROBLEMA 4, se presenta el *PROBLEMA 6*, donde se plantea el estudio generalizado de la pendiente en varios puntos de la trayectoria. Además, se desvelan las relaciones entre las gráficas de una función y su derivada. Por último, se utilizan las TIC para hacer el paso al límite de forma precisa.
- **Sesión 8: La función derivada II**. En esta sesión se plantean hacer ejercicios que consoliden la comprensión de las relaciones que hay entre las gráficas de una función y la de su derivada. Algunas propuestas son, dadas muchas gráficas, encontrar las parejas que correspondan a una función y su derivada. Otra opción es dada una gráfica, esbozar la de su derivada y viceversa.
- **Sesión 9: La función derivada III**. En esta sesión se trabajará el PROBLEMA 7, que ilustra cómo una función se confunde con su recta tangente al hacer zoom en torno a un punto. También ilustra la necesidad de que una curva sea suave para hablar de pendiente en un punto.
- **Sesión 10: Cálculo de la derivada I**. En esta sesión se plantea el *PROBLEMA 8*, que sirve de enlace con lo que comúnmente se ve en los libros de texto, donde se presenta la tasa de variación instantánea como límite de tasas de variación media (y la recta tangente como límite de rectas secantes). Sin embargo, a estas alturas, la ventaja de esta propuesta es que lo único novedoso es el límite pues

los alumnos ya han trabajado extensivamente los conceptos de pendientes de rectas secantes y las tasas de variación medias.

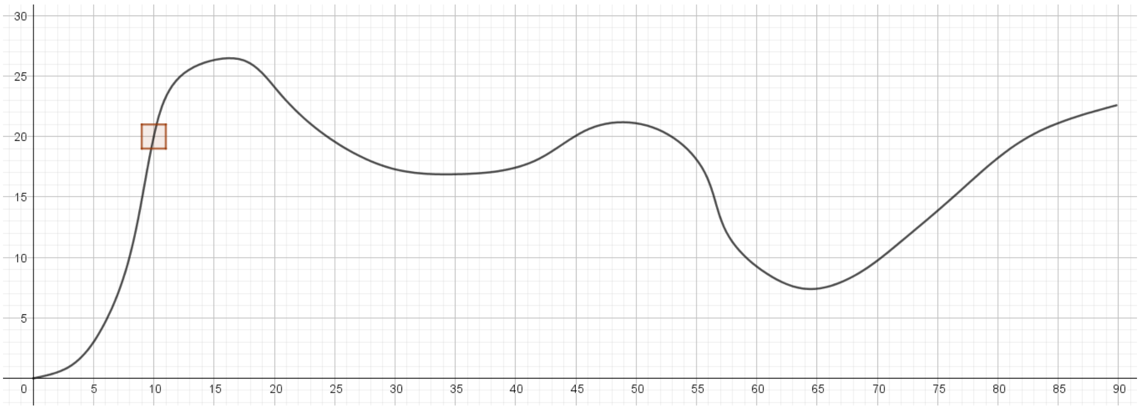
- **Sesión 11: Cálculo de la derivada II**. En esta sesión el alumno es sutilmente introducido a las manipulaciones algebraicas que tendrá que utilizar más adelante para calcular derivadas, por medio del *PROBLEMA 9*. Esta sesión puede ser un buen momento para añadir ejercicios de naturaleza variada.
- **Sesión 12: Evaluación**. En esta sesión se realizará la prueba escrita que detallamos más adelante.
- **Sesión 13: Evaluación II**. En esta sesión se comentará en el aula los problemas de la prueba de evaluación, teniendo en cuenta el desempeño de los alumnos.

X. Sobre la evaluación

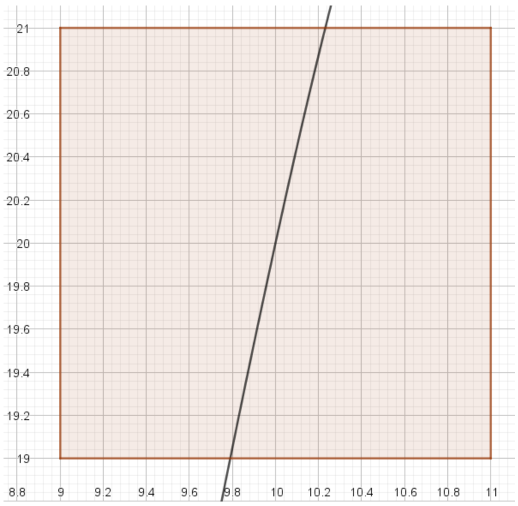
X.1. Diseña una prueba escrita que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos

Problema 1 (5 puntos)

Un coche está dando vueltas a un circuito. La siguiente gráfica representa la velocidad del coche en función del tiempo durante la primera vuelta, expresada como metros por segundo.



La siguiente figura muestra la misma gráfica, pero haciendo zoom en el instante correspondiente a 10 segundos más tarde de empezar la vuelta.



Responde a las siguientes cuestiones.

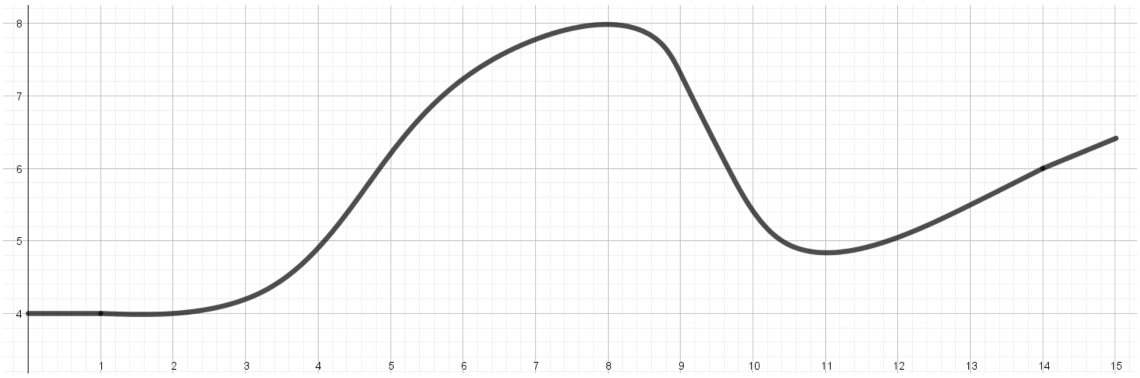
a) Teniendo en cuenta que la aceleración es la tasa de variación de la velocidad, ¿Cuál fue la aceleración media durante la vuelta?

b) ¿Y la aceleración promedio durante los últimos 20 segundos?

c) Con la información proporcionada, aproxima la aceleración en $t = 10$. ¿Cuál es, aproximadamente, la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese punto?
d) ¿En qué instante estaba acelerando más? ¿Por qué?
e) ¿En qué instante dirías que el coche frenó con más fuerza? ¿Por qué?

Problema 2 (2 puntos)

a) Un sensor monitoriza la temperatura de una habitación en función del tiempo, $f(t)$, cuya información se muestra en la siguiente figura. Haz un boceto de la función derivada. No es necesario que sea exacto, pero sí debe contener los ceros de f', y su signo debe ser correcto.



Problema 3 (3 puntos)

Dada la función $f(x) = x^3 - 1$, calcula $f'(1)$ de dos formas:

a) Calculando tasas de variación media en intervalos cada vez más pequeños (al menos 3 intervalos distintos), de modo que $x = 1$ sea el extremo izquierdo del intervalo, y prediciendo el límite.
b) Dividiendo $f(x)$ entre $x - 1$ y simplificando en la expresión del apartado anterior. ¿Qué sucede cuando x tiende a 1?

X.2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos pretendes evaluar?

A continuación, indicamos los principales aspectos a evaluar.

- **Problema 1.**
    a) El alumno es capaz de calcular tasas de variación media y no cae en el error de asumir que la gráfica es de tipo espacio-tiempo.
    b) Lo mismo que el a), pero además el alumno sabe interpretar una gráfica.
    c) El alumno sabe aproximar una tasa de variación instantánea utilizando tasas de variación media, e identifica este concepto con la pendiente de la recta secante/tangente.
    d) El alumno entiende que la aceleración máxima se corresponde con la máxima pendiente en la gráfica de la velocidad.
    e) Lo mismo que el d) pero además se incorpora la idea de variaciones negativas.
- **Problema 2:**
    a) El alumno es capaz de esbozar la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función original basándose en la localización de extremos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- **Problema 3:**
    a) El alumno comprende que la derivada es la tasa de variación instantánea y esta se aproxima por medio de tasas de variación media en intervalos pequeños.
    b) El alumno es capaz de realizar la división de polinomios y entiende el paso al límite.

X.3. ¿Qué respuestas esperas en función del conocimiento de los alumnos?

- **Problema 1.**
    a) Salvo que un alumno esté completamente perdido, se espera que sea capaz de calcular la tasa de variación media correctamente haciendo una lectura de la gráfica.

b) Aquí puede suceder que no interpreten bien el enunciado e intenten calcular una tasa de variación que no se corresponda con lo pedido. Por lo demás, no tiene mayor dificultad que el apartado anterior.
c) Dada la inercia de los apartados anteriores, es posible que algún estudiante calculará la aceleración promedio durante los 10 primeros segundos. También es posible que haya quien no utilice la ampliación dada para la gráfica y haga una aproximación más tosca.
d) Los alumnos que sepan interpretar la aceleración como pendiente, no tendrán problema en identificar aproximadamente las soluciones. Sin embargo, aquel que no haya conseguido afianzar este concepto, probablemente marque los puntos donde la velocidad es máxima (extremos de la gráfca).
e) Aquí esperamos las mismas respuestas que en el apartado anterior, con la salvedad de que es posible que alumnos no identifiquen que frenar se corresponde con la pendiente más negativa posible, pese a responder correctamente el apartado anterior.

- **Problema 2.**
  a) En este problema se pide una respuesta gráfica donde la precisión es mucho menos importante que la idea general. Se espera que los alumnos identifiquen los extremos relativos de la función como ceros de la función derivada. Para los que tengan conocimientos más sólidos, también se espera que reconozcan que la derivada es constantemente nula al inicio del domino, en el intervalo (0,2). Se espera que los signos en el resto del dominio estén correctamente, y en un caso ideal, que se refleje el hecho de que el último tramo creciente tiene una pendiente menor que el primer tramo.
- **Problema 3.**
  a) Se espera que calculen las tasas sin mayores complicaciones. Puede que no estimen bien el límite si cogen intervalos demasiado grandes.
  b) Puede que fallen en la división si no dominan esa técnica, y puede que no evalúen el límite si no comprenden el concepto y no aprendieron con la actividad análoga.

X.4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Cada problema tiene asignada una cantidad de puntos, e iremos penalizando según se cometan errores. La filosofía es la misma que la descrita para el modelo de tercios (Gairín, Muñoz, & Oller, 2012), pero más simple dada la sencillez de la prueba.

- **Problema 1.** (5 puntos).
    a) (1 punto) En este caso las tareas principales son la correcta lectura de la gráfica y el planteamiento de la tasa de variación, mientras que las auxiliares son las operaciones aritméticas necesarias.
    b) (1 punto) Como en el apartado anterior, la tarea principal pasa por la identificación del cociente a realizar, siendo el cálculo una tarea auxiliar.
    c) (1 punto) De nuevo, la tarea principal es identificar los puntos necesarios para hacer la tasa de variación. Aquí la lectura de la gráfica se consideraría como auxiliar específica, y los cálculos como auxiliares generales.
    d) (1 punto) En este caso la tarea principal es la identificación del punto de máxima pendiente. La única tarea auxiliar es la lectura del valor numérico de la abscisa en ese punto.
    e) (1 punto) Igual que el apartado anterior.
- **Problema 2.** (2 puntos)
    a) Aquí la tarea principal es deducir el comportamiento global de la derivada a partir de la gráfica de la función original. Como tarea auxiliar tenemos la confección de la nueva gráfica.
- **Problema 3.** (3 puntos)
    a) (1.5 puntos) Aquí la tarea principal consiste en la elección de los intervalos que aproximen la pendiente en el punto dado, así como la evaluación del límite. La tarea auxiliar son los cálculos aritméticos.
    b) (1.5 puntos) En este apartado, el cociente de polinomios es la tarea principal, junto a la evaluación del límite.

Bibliografía

Arce Sánchez, M., Conejo Garrote, L., & Muñoz Escolano, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Azcárate, C., Bosch, D., Casadevall, M., & Casellas, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Síntesis España.

Bescós, E., & Pena, Z. (2002). *Matemáticas: 1o. Bachillerato : ciencias de la naturaleza y de la salud*. San Fernando de Henares (Madrid: Oxford educación.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique. *Actes de l'UE de la Rochelle*, 91–118.

Cid Castro, E., & Muñoz Escolano, J. M. (s. f.). *La teoría antropológica de lo didáctico (TAD) Un marco teórico para la didáctica de las matemáticas*.

Colera, J., Oliveira, M. J., García, R., & Santaella, E. (2012). *Matemáticas I: Bachillerato 1*. Madrid: Anaya.

Gairín, J. M., Muñoz, J. M., & Oller, A. M. (2012). *Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas*.

González García, A., Muñiz Rodríguez, L., & Rodríguez Muñiz, L. J. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula abierta*, *47*(4), 449-462.

González García, C., Llorente, J., & Jiménez, M. J. R. (2005). *Matemáticas 1: 1o. Bachillerato : ciencias de la naturaleza y de la salud-tecnología*. Madrid: Editex.

Heller, P., Keith, R., & Anderson, S. (1992). Teaching problem solving through cooperative grouping. Part 1: Group versus individual problem solving. *American journal of physics*, *60*(7), 627–636.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics …*.

Katz, V. J. (2009). *A history of mathematics: An introduction* (3rd ed). Boston: Addison-Wesley.

Marea Verde. (2018). *MATEMÁTICAS I - 1º de Bachillerato*. Textos Marea Verde.

ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. (2016). (02), 819.

ORDEN ECD/494/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. (2016). (03), 929.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *13*(1).

Rashed, R. (2013). *The development of Arabic mathematics: Between arithmetic and algebra* (Vol. 156). Springer Science & Business Media.

Selden, A., Selden, J., & Mason, A. (1994). *Even good calculus students can't solve nonroutine problems*. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4303.7208

Stein, M. K., & Smith, M. (2018). Practices for orchestrating productive mathematics discussions. *Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics*.

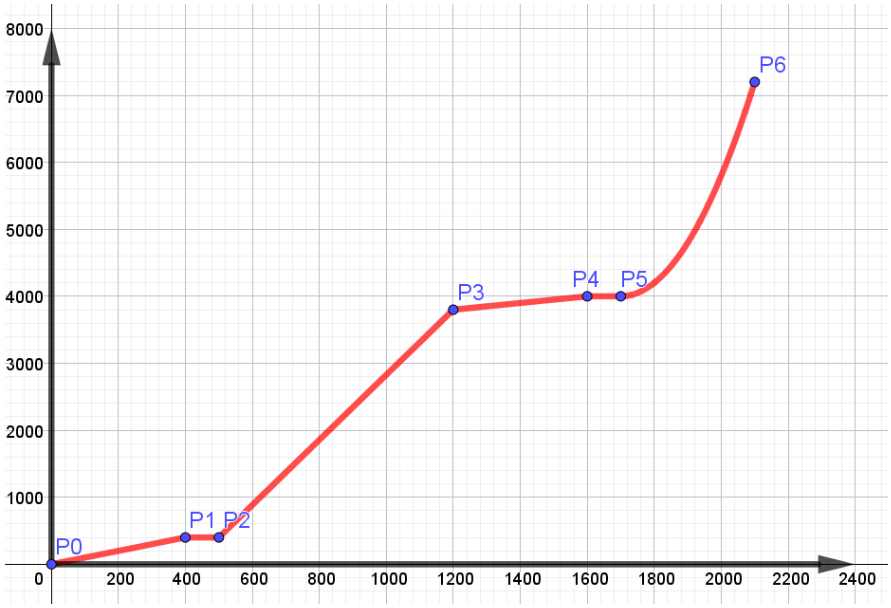
Ward, M., & Sweller, J. (1990). Structuring effective worked examples. *Cognition and instruction*, *7*(1), 1–39.

Zakaria, E., Chin, L. C., & Daud, M. Y. (2010). The effects of cooperative learning on students' mathematics achievement and attitude towards mathematics. *Journal of social sciences*, *6*(2), 272–275.

Anexo I – Problemas resueltos

PROBLEMA 1.

Un estudiante, para ir a la escuela, necesita coger todos los días el tranvía y hacer trasbordo en un autobús. La siguiente gráfica muestra su recorrido durante el último día.



Donde los puntos indicados corresponden a los siguientes eventos:

- P0: Sale andando.
- P1: Llega a la parada del tranvía y espera.
- P2: Llega el tranvía y se monta.
- P3: El tranvía llega a su destino y camina hacia la parada de bus.
- P4: Llega a la parada de bus y espera.
- P5: El bus llega a la parada y se monta.
- P6: El bus llega a su destino.

Responde a las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuánto ha durado el viaje?

b) ¿Cuál es la distancia total recorrida?

c) ¿Cuál es la velocidad media durante el viaje?

d) ¿Cuál ha sido la velocidad media que ha llevado el tranvía? ¿Y el autobús?

e) ¿En qué tramo ha andado más rápido el estudiante? ¿Para llegar a la parada del tranvía o para la parada del autobús? ¿En cuál de esos dos tramos está la gráfica más inclinada?

Solución

a) Mirando la coordenada x de la gráfica en el final, vemos que el tiempo en P6 es 2100, mientras que en P0 es 0. Por tanto, el tiempo trasncurrido es 2100 segundos (35 minutos).

b) Mirando la altura de la gráfica en el final, vemos que la distancia recorrida es la altura en P6, 7200, menos la altura en P0, 0. Por tanto, la distancia es 7200 metros.

c) La velocidad media viene dada por

$$v_{media} = \frac{7200 - 0}{2100 - 0} \approx 3.43\ m/s$$

d) Para estudiar la velocidad media del tranvía, tenemos que ver cuánto ha variado la distancia y cuánto tiempo ha tardado, así:

$$v_{media\ tranvía} = \frac{3800 - 800}{1200 - 500} \approx 4.28\ m/s$$

Para el autobús hacemos lo mismo, mirando la variación en distancia y tiempo:

$$v_{media\ bus} = \frac{7200 - 4000}{2100 - 1700} = 8\ m/s$$

e) En el primer tramo a pie, la velocidad ha sido $v_{P1-P2} = \frac{400-0}{400-0} = 1\ m/s$. Mientras que en el segundo, ha sido $v_{P3-P4} = \frac{4000-3800}{1600-1200} = 0.5\ m/s$

PROBLEMA 2. Adaptado de (Azcárate et al., 1996)

Para comprobar si un coche supera la velocidad permitida de 25 m/s en cierto tramo, se toman varias fotografías (una cada medio segundo) y se mide la distancia del coche en cada fotografía a un punto de referencia. La siguiente tabla muestra los datos para 2 coches.

Instante (s)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
Coche 1 (m)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Coche 2 (m)	0	1	4	9	16	25	36	49	64

a) Dibuja una gráfica espacio-tiempo indicando el recorrido de los dos coches.

b) ¿Qué coche ha tenido una mayor velocidad media durante todo el trayecto?

c) ¿Qué coche ha ido más rápido en promedio entre t=0 y t=2? ¿Qué gráfica tiene mayor pendiente?

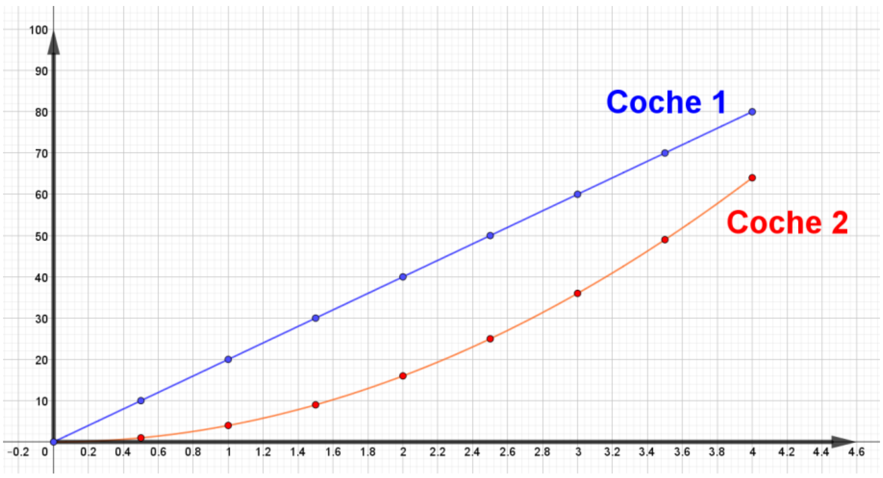
d) ¿Qué coche ha ido más rápido en promedio entre t=2 y t=3? ¿Qué gráfica tiene mayor pendiente?

e) ¿Qué coche ha ido más rápido en promedio entre t=3 y t=4? ¿Qué gráfica tiene mayor pendiente?

f) ¿Cómo calcularías la velocidad aproximada que indica el velocímetro cuando t=4?

Solución

a) La gráfica es la siguiente:



b) Las velocidades medias son:

$$v_1 = \frac{80-0}{4-0} = 20\ m/s$$

$$v_2 = \frac{64-0}{4-0} = 16\ m/s$$

Por lo tanto, el primer coche ha ido más rápido. También podría deducirse del hecho de que, en el mismo tiempo, el primer coche recorre una distancia mayor.

c) Las velocidades medias en los dos primeros segundos son:

$$v_1 = \frac{40-0}{2-0} = 20\ m/s$$
$$v_2 = \frac{16-0}{2-0} = 8\ m/s$$

La gráfica del coche 1 tiene mayor pendiente, como se ve en la figura.

d) Las velocidades medias entre t=2 y t=3 son:

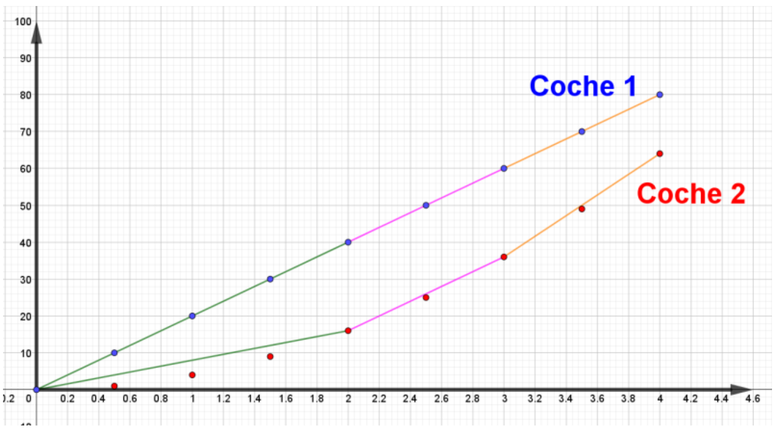
$$v_1 = \frac{60-40}{3-2} = 20\ m/s$$
$$v_2 = \frac{36-16}{3-2} = 20\ m/s$$

Ambas gráficas tienen la misma pendiente, como se ve en la figura.

e) Las velocidades medias entre t=3 y t=4 son:

$$v_1 = \frac{80-60}{4-3} = 20\ m/s$$
$$v_2 = \frac{64-36}{4-3} = 28\ m/s$$

La gráfica del coche 2 tiene mayor pendiente, como se ve en la figura.

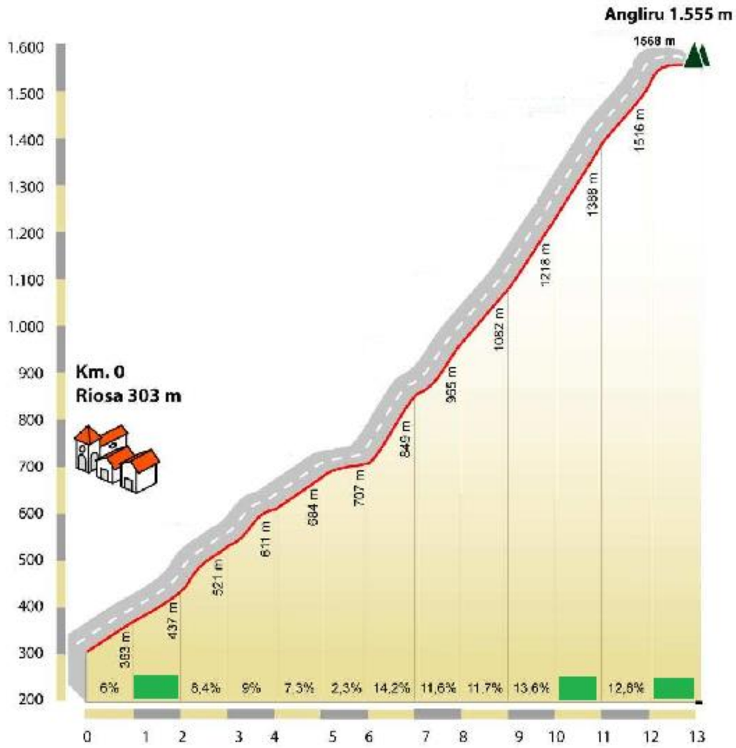


f) Para aproximar la velocidad que marca el velocímetro, miramos la velocidad promedio en el último medio segundo.

$$v_1 = \frac{80-70}{4-3.5} = 20\ m/s$$
$$v_2 = \frac{64-49}{4-3.5} = 30\ m/s$$

PROBLEMA 3.

El Angliru es uno de los puertos más famosos que habitualmente se recorren en La Vuelta Ciclista a España, conocido por su extrema dureza. La siguiente imagen describe el perfil de la montaña.



Responde a las siguientes cuestiones.

a) ¿Qué tramo tiene mayor pendiente, la primera mitad o la segunda mitad?

b) En la parte inferior de la figura se describen las pendientes de cada tramo. Sin embargo, 3 pendientes han sido borradas. ¿Puedes decir cuál de las 3 será la pendiente más alta sin necesidad de calcularlas? ¿Por qué? Calcula las pendientes y comprueba el resultado.

c) ¿Cuál es la longitud del puerto? ¿Cuál es su altitud? ¿Qué pendiente promedio tiene?

d) En torno al kilómetro 10.8 se encuentra la conocida como *Cueña les Cabres*, donde el puerto tiene las pendientes más duras. Sabiendo que la altitud en ese punto exacto es de 1300 metros, y que la altitud 10 metros más adelante (kilómetro 10.81) es de 1302.3 metros, ¿puedes estimar la pendiente en ese punto?

Solución

a) La segunda mitad está más inclinada, por lo que tiene más pendiente.

b) De los tres sombreados, el del medio está más inclinado, por lo que tendrá mayor pendiente. Podemos calcularlas para comprobarlo:

$$Pendiente_1 = \frac{437-363}{2000-1000} \approx 0.074 \equiv 7.4\%$$
$$Pendiente_2 = \frac{1388-1218}{11000-10000} \approx 0.170 \equiv 17.0\%$$
$$Pendiente_3 = \frac{1558-1516}{13000-12000} \approx 0.042 \equiv 4.2\%$$

c) El puerto tiene una longitud de 13 kilómetros, como se lee en la parte inferior de la gráfica. La altitud al final del puerto es de 1555 metros, sin embargo, sólo se suben 1555-303=1252 metros, ya que, al empezar el puerto, la altitud es de 303 metros. Por tanto, la pendiente promedio es:

$$Pendiente = \frac{1555-303}{13000-0} \approx 0.096 \equiv 9.6\%$$

d) Podemos calcular la pendiente promedio en esos 10 metros de recorrido, siendo el resultado:

$$Pendiente = \frac{1302.3-1300}{10810-10800} \approx 0.23 \equiv 23\%$$

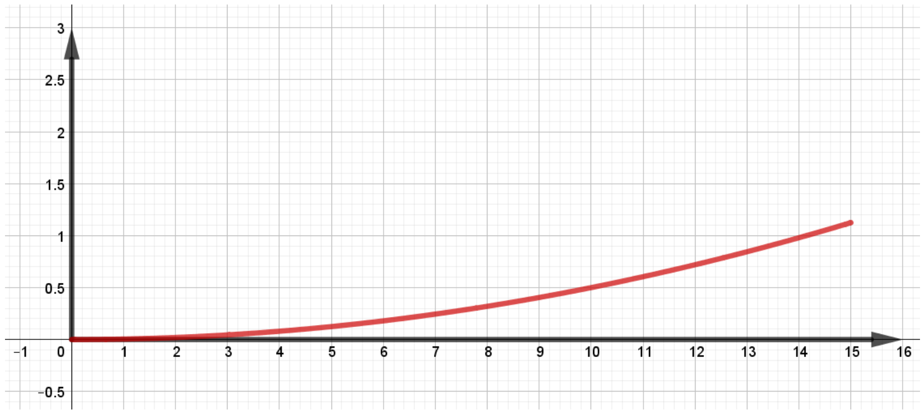
Esta pendiente promedio, al tomar dos puntos muy próximos, nos dará una idea de la pendiente en un punto exacto.

PROBLEMA 4.

Un patinete eléctrico tiene las siguientes especificaciones.

- Velocidad máxima: 25 km/h.
- Autonomía: 30 km.
- Pendiente máxima: 14%.

Se quiere utilizar para subir una rampa que tiene el siguiente perfil:



Que puede expresar aproximadamente como $y = 0.005 \cdot x^2$, donde $x = 0$ y $x = 15$ corresponden al inicio y final de la rampa, respectivamente.

a) ¿Cuál es la altura total que tiene que superar el patinete?

b) ¿Cuál es la pendiente promedio de la rampa? ¿Crees que es posible subirla utilizando el patinete?

c) ¿Cuál es la pendiente de los últimos 5 metros? ¿En los últimos 2 metros? ¿En el último metro? ¿En los últimos 10 centímetros? ¿Y al final de la rampa? ¿Cómo será la gráfica en esos últimos 10 centímetros?

Solución

a) Al final de la rampa, $x = 15$, y sustituyendo, se encuentra $y = 1.125$, por lo que el patinete debe superar una altura de 1.125 metros (nótese que al empezar, la altura es 0).

b) La pendiente promedio es:

$$Pendiente = \frac{1.125 - 0}{15 - 0} = 0.075 \equiv 7.5\%$$

Estos datos parecen indicar que el patinete puede subir la rampa, pero conocer la pendiente promedio puede que sea suficiente, ya que parece que la rampa se inclina más al final.

c) Llamaremos Pendiente[a,b] a la pendiente entre los metros a y b. Así, los intervalos pedidos se corresponden con los tramos [10,15], [13, 15], [14, 15], [14.9, 15]:

$$Pendiente[10,15] = \frac{0.005 \cdot 15^2 - 0.005 \cdot 10^2}{15 - 10} = 0.125 \equiv 12.5\%$$

$$Pendiente[12,15] = \frac{0.005 \cdot 15^2 - 0.005 \cdot 12^2}{15 - 12} = 0.135 \equiv 13.5\%$$

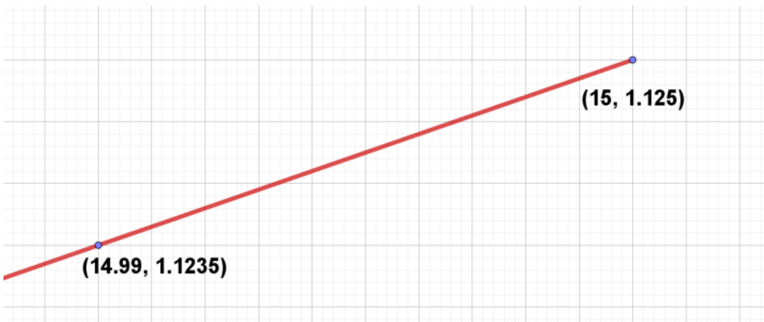
$$Pendiente[14{,}15] = \frac{0.005 \cdot 15^2 - 0.005 \cdot 14^2}{15 - 14} = 0.145 \equiv 14.5\%$$

$$Pendiente[14.9{,}15] = \frac{0.005 \cdot 15^2 - 0.005 \cdot 14.9^2}{15 - 14.9} = 0.1495 \equiv 14.95\%$$

Como se ve, la pendiente va subiendo al final de la rampa. Para aproximar la pendiente al final, podríamos coger la pendiente promedio en los últimos 10 cm, o hacer incluso una aproximación más detallada, cogiendo el promedio en el último cm.

$$Pendiente[14.99{,}15] = \frac{0.005 \cdot 15^2 - 0.005 \cdot 14.99^2}{15 - 14.99} = 0.14995 \equiv 14.995\%$$

Y podemos decir, sin rigor aún, que la pendiente parece que acerca al 15% al final de la rampa. La gráfica tiene aspecto de recta en esos últimos 10 centímetros pues la pendiente apenas varía.



PROBLEMA 5. Adaptado de (Azcárate et al., 1996)

Una pequeña empresa se dedica a la fabricación de pins. El coste de producción de cada nuevo encargo de pins viene dado por:

$$C = 50 + 0.1n + 1.5\sqrt{n}$$

Donde n es el número de pins fabricados y C el coste total en Euros.

a) ¿Cuál es el coste de fabricar un encargo de 25 pins ¿Y de 100, 1.000 y 10.000 pins?

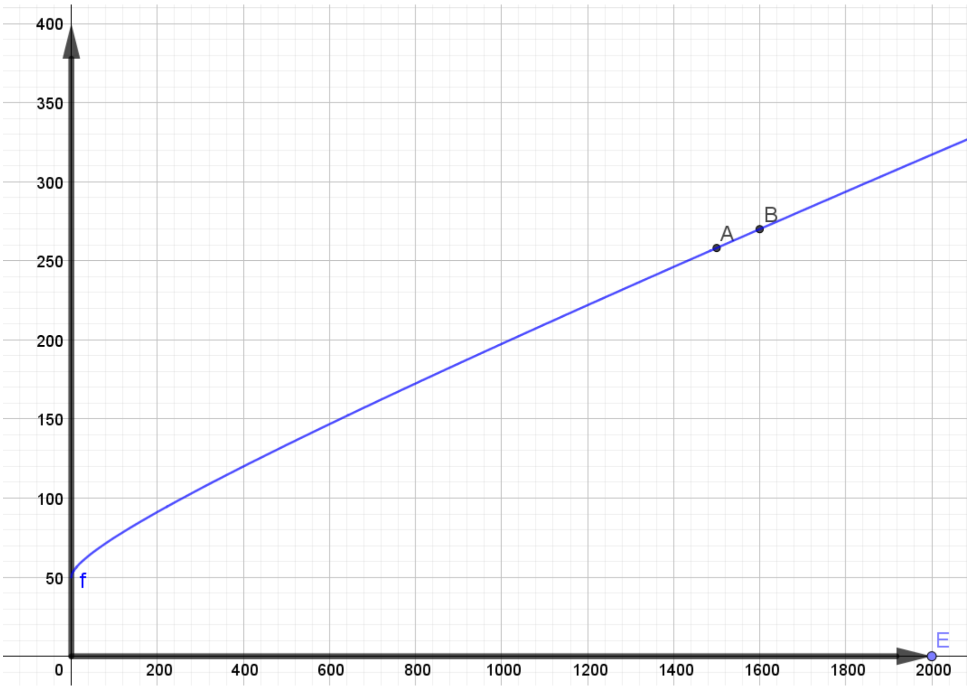
b) Calcula el coste medio por unidad en cada uno de los casos del apartado anterior.

c) Calcula la diferencia de coste entre un encargo de 25 pins y uno de 26 pins, o lo que es lo mismo, el coste de fabricar un pin más cuando llevamos fabricados 25. Este valor recibe el nombre de coste marginal para una producción de 25 pins.

d) ¿Cuál es el coste marginal para un encargo de 100 pins, de 1.000 y de 10.000? ¿Y de 1 pin?

e) Si llevamos fabricados 1.500 pins de un cierto encargo, pero en el último momento el pedido aumenta en 100 unidades, ¿cuál es el coste promedio de cada pin extra?

f) La siguiente figura ilustra la relación gráfica entre el número de pins y el coste de fabricación.



Calcula la pendiente de la recta secante entre n=1500 y n=1600. Compárala con el resultado del apartado anterior. ¿Qué está sucediendo?

Solución

a) El coste se obtiene sustituyendo en la fórmula:

$$C(25) = 50 + \ 0.1 \cdot 25 + 1.5\sqrt{25} = 60$$

$$C(100) = 50 + \ 0.1 \cdot 100 + 1.5\sqrt{100} = 75$$

$$C(1000) = 50 + \ 0.1 \cdot 1000 + 1.5\sqrt{1000} \approx 197.43$$

$$C(10000) = 50 + \ 0.1 \cdot 10000 + 1.5\sqrt{10000} \approx 1200$$

b) El coste medio por unidad en cada caso es:

$$Coste\ Medio(25) = \frac{C(25)}{25} = 2.4$$

$$Coste\ Medio(100) = \frac{C(100)}{100} = 0.75$$

$$Coste\ Medio(1000) = \frac{C(1000)}{1000} \approx 0.20$$

$$Coste\ Medio(10000) = \frac{C(10000)}{10000} = 0.12$$

c) El coste marginal para un encargo de 25 pins es:

$$Coste\ Marginal(25) = C(26) - C(25) \approx 0.24$$

d) Para el resto de cantidades:

$$Coste\ Marginal(100) = C(101) - C(100) \approx 0.17$$

$$Coste\ Marginal(1000) = C(1001) - C(1000) = 0.12$$

$$Coste\ Marginal(10000) = C(10001) - C(10000) = 0.10$$

e) Para un pedido de 1500 pins, el coste inicial es (tras sustituir), $C(1500) \approx 258.10$. Sin embargo, en el momento en el que el pedido aumenta a 1600 unidades, el coste pasa a ser, tras hacer cálculos, $C(1600) \approx 270$. Por lo tanto, el coste de estos 100 pins extra es de $C(1600) - C(1500) \approx 11.90$, de modo que el coste promedio de cada pin extra es

$$\frac{C(1600) - C(1500)}{1600 - 1500} = \frac{11.90}{100} = 0.119$$

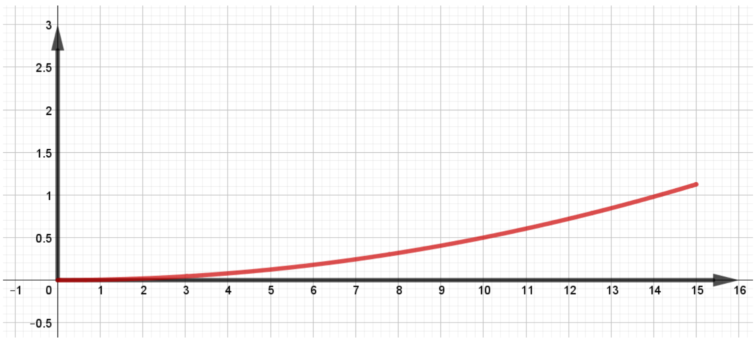
f) Para calcular la pendiente de la recta tangente, tenemos que tener en cuenta lo que varía la gráfica verticalmente y horizontalmente, y hacer el cociente:

$$Pendiente = \frac{C(1600) - C(1500)}{1600 - 1500} = 0.119$$

Que es exactamente la respuesta a la pregunta anterior, ya que la pendiente es la tasa de variación media, que era lo que nos pedían.

PROBLEMA 6.

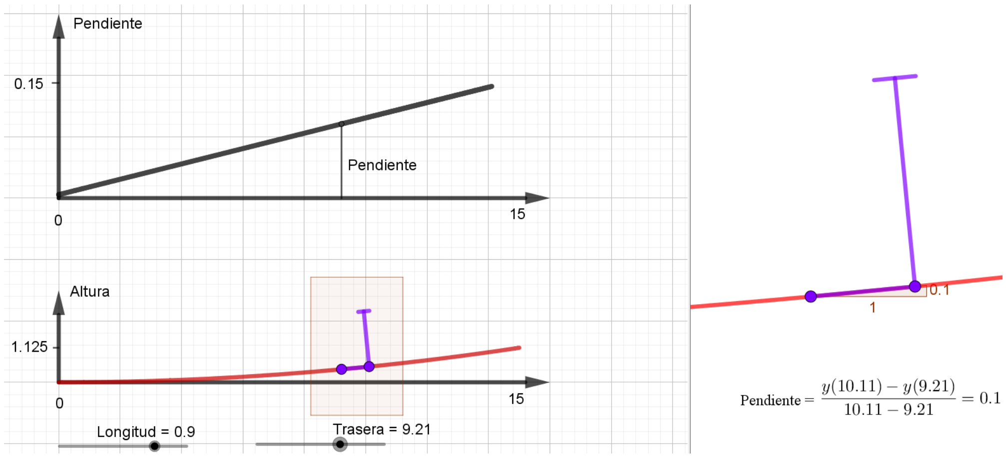
Tenemos un patinete con el que nos queremos enfrentar a un recorrido con el siguiente perfil, dado por $y = 0.005 \cdot x^2$



a) ¿En qué punto crees que será más elevada la pendiente? ¿En qué tramos la pendiente es positiva? ¿Dónde vale cero la pendiente?

b) Aproxima la pendiente en los puntos x=0, 4, 8, 12, y 15 cogiendo puntos suficientemente próximos.

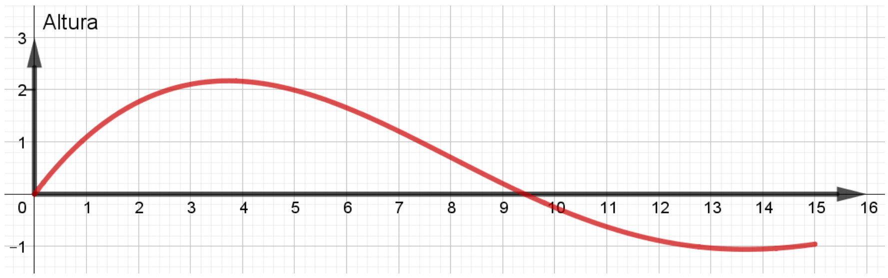
c) Utiliza GeoGebra para calcular la pendiente que soportará el patinete en cada punto teniendo en cuenta que sus dos ruedas se encuentran a 90 cm de distancia.



d) Calcula la pendiente exacta con GeoGebra utilizando el deslizador para hacer que las ruedas estén cada vez más cerca.

e) Compara el resultado del apartado anterior con tus predicciones en el apartado a) ¿Qué relaciones ves entre la gráfica de una función y su derivada?

Repite los apartados a), d) y e) para la siguiente curva.



Solución

a) La pendiente es positiva todo el rato porque la rampa está inclinada hacia arriba. Además, cada vez está más inclinada, por lo que la pendiente será mayor al final. Siendo más precisos, justo al inicio de la rampa, la pendiente es cero porque empieza siendo horizontal.

b) Haciendo zoom lo suficiente sobre la función en cada punto, podemos tener una aproximación de la pendiente puntual mirando pendientes de rectas secantes.

a. En x=0, la pendiente se aproxima por $\frac{y(0.01)-y(0)}{0.01-0} = 0.00005$

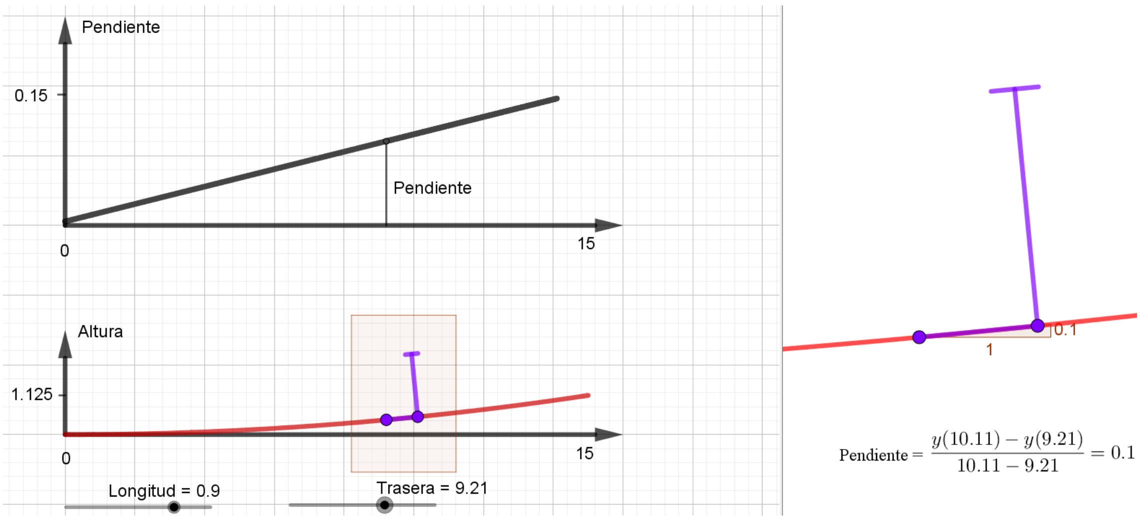
b. En x=4, la pendiente se aproxima por $\frac{y(4.01)-y(4)}{4.01-4} = 0.04005$

c. En x=8, la pendiente se aproxima por $\frac{y(8.01)-y(8)}{8.01-8} = 0.08005$

d. En x=12, la pendiente se aproxima por $\frac{y(12.01)-y(12)}{12.01-12} = 0.12005$

e. En x=15, la pendiente se aproxima por $\frac{y(15)-y(14.99)}{15-14.99} = 0.14995$

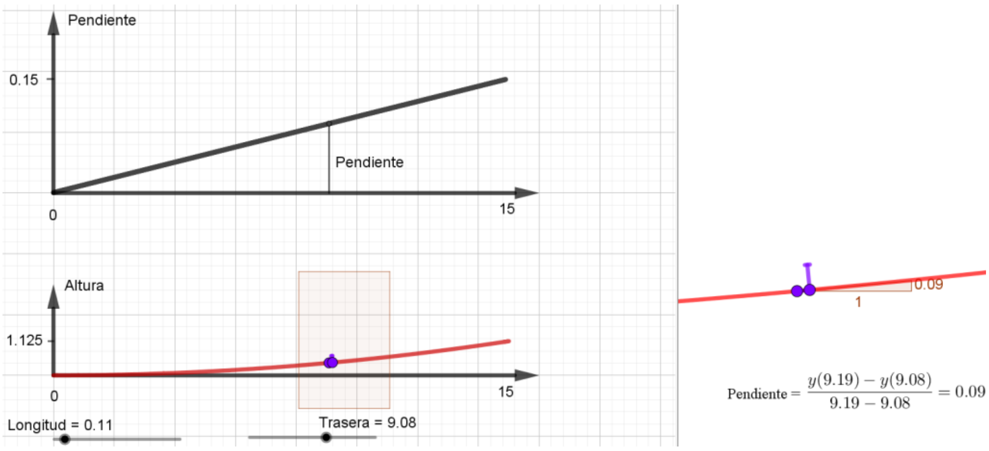
c) Para este apartado hay que utilizar el Applet preparado a tal efecto, cuya captura mostramos a continuación.



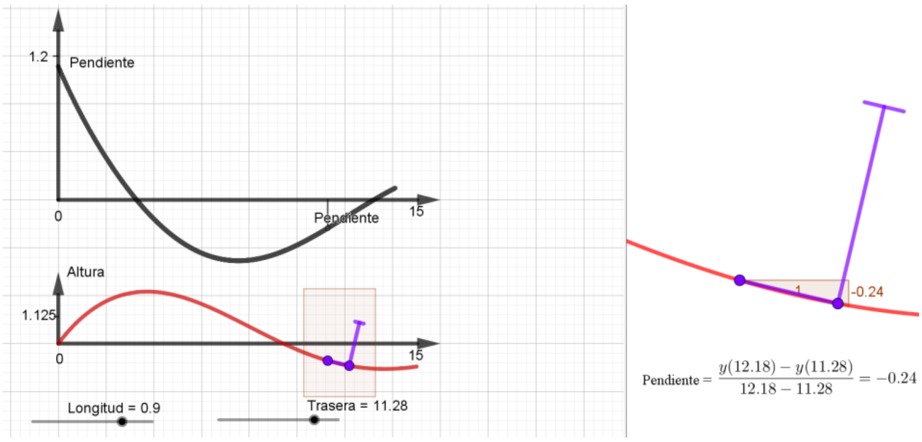
En este applet se incluyen dos deslizadores, uno para mover el patinete a lo largo de la rampa y otro para cambiar el tamaño del patinete. Además, se ofrece una vista ampliada del patinete para apreciar mejor la pendiente. Por último, se dibuja la función pendiente haciendo uso de los deslizadores y la opción de que un punto deje el rastro activado.

d) Al acercar las ruedas, la función derivada va cambiando (nótese que parece que pasa por el origen). Además, esto nos permite calcular la pendiente cada vez más cerca de los extremos.

e) Como se ve, el comportamiento de la función pendiente es el descrito en el primer apartado. Empieza siendo cero pues es horizontal, luego es todo el rato positiva, pero cada vez más grande porque la curva está más inclinada.



Para el segundo apartado, se repite el análisis con la nueva curva, obteniéndose la situación siguiente.

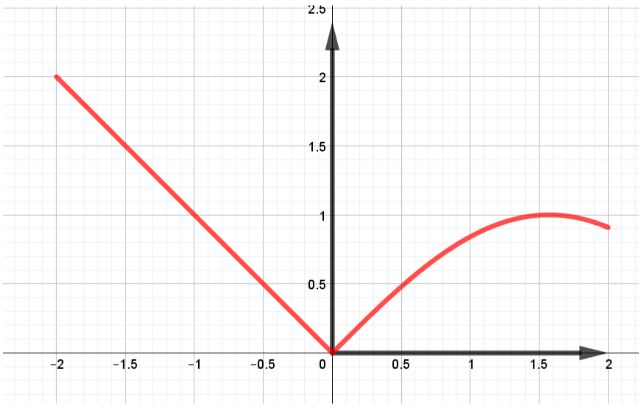


PROBLEMA 7.

Considera la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ \sin x\,, & x \geq 0 \end{cases}$$

Cuya gráfica se muestra en la siguiente figura.



Sabiendo que $f(1) \approx 0.8414$ y $f'(1) \approx 0.5403$, responde a las siguientes cuestiones.

a) Haz un esbozo de la gráfica de $f(x)$ cuando x varía entre 0.9 y 1.1. ¿Cuál es la pendiente de la función en ese intervalo?

b) Repite el proceso, pero dejando que x varíe entre 0.99 y 1.01. ¿Qué forma tiene la gráfica de la función en ese intervalo? ¿Y qué pendiente promedio?

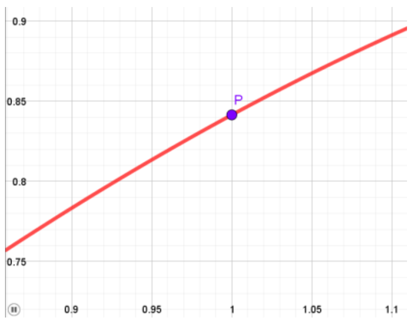
c) Según el apartado anterior, cerca del 1, la gráfica de la función se parece mucho a la de una recta. Calcula la ecuación de esta recta utilizando la expresión $y - y_0 = m(x - x_0)$. Aproxima el valor de $f(1.005)$ utilizando esa aproximación y compárala con el valor exacto.

d) ¿Qué sucede si estudiamos la gráfica de $f(x)$ cuando x varía entre -0.1 y 0.1? ¿Qué puedes decir de la pendiente? ¿Y cuando x varía entre -0.01 y 0.01 ?

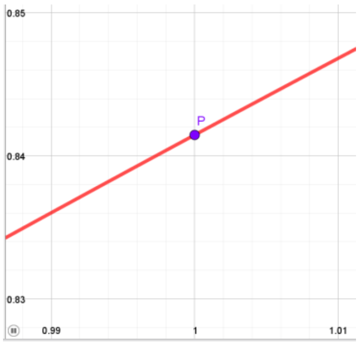
e) Explica qué diferencias hay entre el 0 y el 1 para esta función.

Solución

a) Si hacemos zoom lo suficiente, la gráfica de la función se confunde con la de una recta (la de la recta tangente). Sobre esta recta tenemos la información necesaria para describirla, pasa por el punto (1,f(1)) y tiene pendiente f'(1). Por lo que podemos hacernos una idea de cómo es. Sin embargo, en este apartado se espera un boceto antes que formalizar esta idea.



b) En este apartado ya debemos dibujar una recta:



Evidentemente, la pendiente promedio de esta gráfica coincide con la pendiente en el punto señalado, que es 0.84.

c) Utilizando la ecuación punto pendiente de una recta, obtenemos que

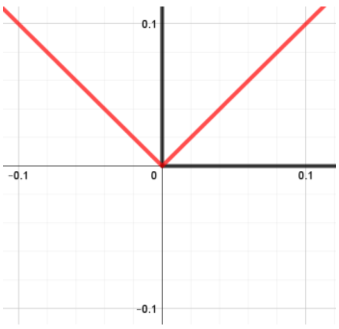
$$y - 0.8414 = 0.5403 \cdot (x - 1)$$

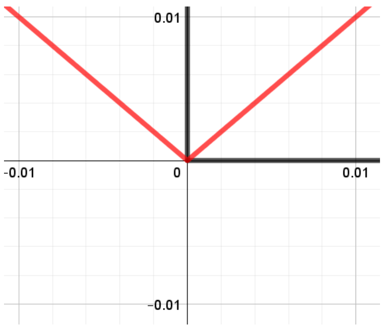
En particular, podemos calcular el valor de y para $x = 1.005$, resultando

$$y = 0.8414 + 0.5403 \cdot (1.005 - 1) = 0.8441$$

Mientras que el valor exacto resulta ser $f(1.005) = \sin 1.005 \approx 0.8442$.

d) No importa el zoom que hagamos, la función sigue teniendo un "vértice" y no se parece a una recta.





e) El punto 1 es un punto donde la función varía de forma suave, y tiene sentido hablar de pendiente en ese punto. En el 0, la pendiente no está definida pues, no importa el zoom que hagamos, no aparece nunca una recta. Por eso decimos que la función es derivable en 1 y no es derivable en 0.

PROBLEMA 8. Adaptado de (Azcárate et al., 1996)

Queremos calcular la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = x^2$ en $x = 1$. Para ello:

a) Dibuja la gráfica de la función en el intervalo [0, 1.5]. Hazlo en papel milimetrado.

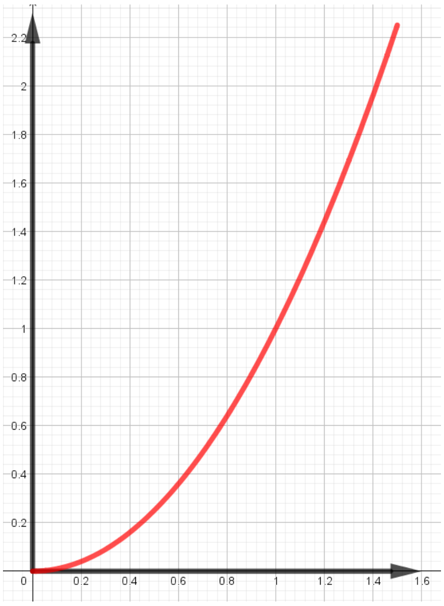
b) Calcula la pendiente de la recta que corta a la gráfica (recta secante) en los puntos $x = 1$ y $x = 1.5$.

c) Por en el resultado obtenido en el apartado anterior en el lugar que le corresponda en la tabla siguiente. Competa la tabla haciendo lo mismo para otras rectas secantes de modo que corten a la gráfica todas en $x = 1$ y otro punto de corte cercano a 1.

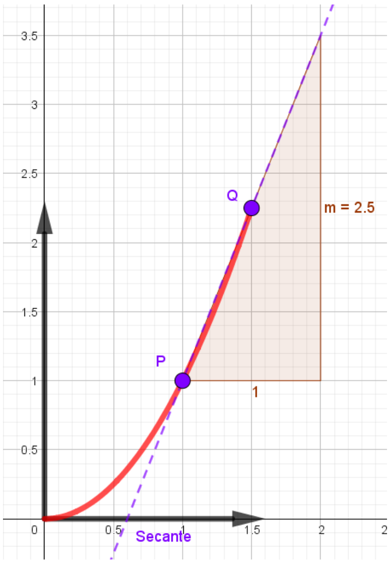
x	1.5	1.1	1.01	1.001
$f(x)$				
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$				

Solución

a) La gráfica de la función queda de la siguiente manera:



b) La recta secante a la gráfica pasando por los puntos definidos por x=1 y x=1.5 es



Cuya pendiente es $\frac{1.5^2-1^2}{1.5-1} = 2.5$.

c) Análogamente, para el resto de rectas secantes, la tabla queda:

x	**1.5**	**1.1**	**1.01**	**1.001**
$f(x)$	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$	2.5	2.1	2.01	2.001

PROBLEMA 9. Adaptado de (Azcárate et al., 1996)

En el problema anterior has tenido que calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ en $x = 1$ haciendo pendientes de rectas secantes, dadas por $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ cogiendo valores de x cada vez más próximos a 1.

a) En la expresión anterior que nos da la pendiente, sustituye $f(x) = x^2$ y $f(1) = 1$. De este modo obtendrás un cociente de polinomios. Haz la división de estos dos polinomios.

b) Utiliza esta expresión más simple para comprobar los valores de la tabla anterior.

c) ¿Sabrías calcular el valor de esta pendiente cuando x tiende a 1 sin necesidad de hacer aproximaciones?

d) Repite este procedimiento para calcular la pendiente en $x = a$ en lugar de $x = 1$.

Solución

a) La expresión anterior queda $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ tras hacer la división de poliomios.

b) De un vistazo se comprueba que la segunda fila resulta de sumarle una unidad a la fila de las x.

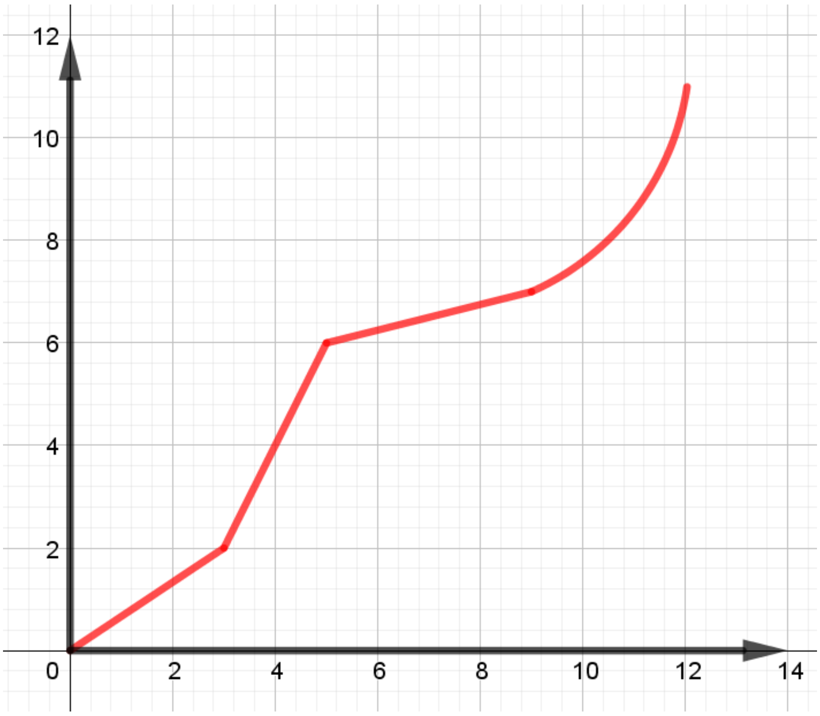
c) En la expresión, parece claro que, si x se acerca a 1, la pendiente se acerca a 1+1=2, lo que coincide con lo visto en la tabla anterior.

d) Si tuviéramos que calcular la pendiente en x=a, haríamos pendientes de rectas secantes, las cuáles tendrían la siguiente expresión: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2-a}{x-a}$. Haciendo la división de polinomios, se obtiene que esto equivale a $x+a$.

Anexo II – Ejemplos de Ejercicios

EJERCICIO 1.

La siguiente gráfica describe una gráfica espacio-tiempo.



Calcula:

a) El tiempo total transcurrido y la distancia total recorrida.

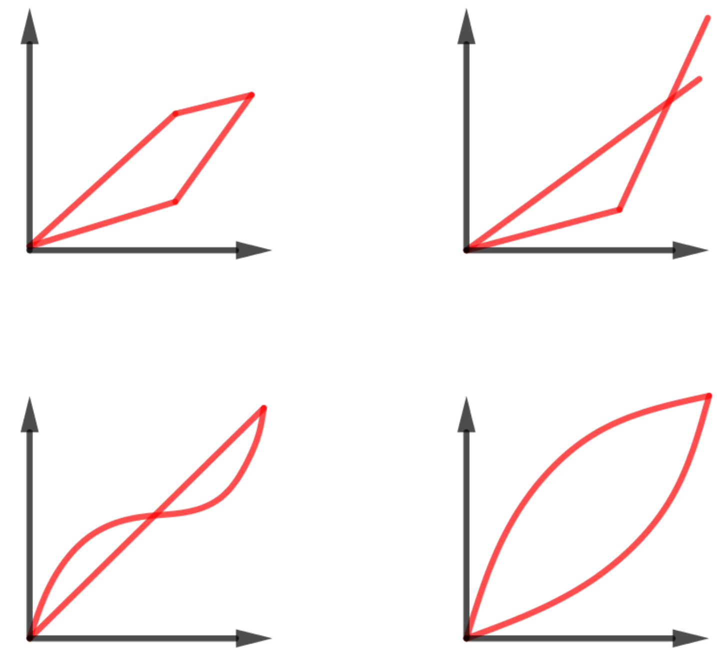
b) La velocidad media en los primeros 3 segundos.

c) La velocidad media en los últimos tres segundos.

d) La velocidad instantánea a los 4 segundos de arrancar.

EJERCICIO 2.

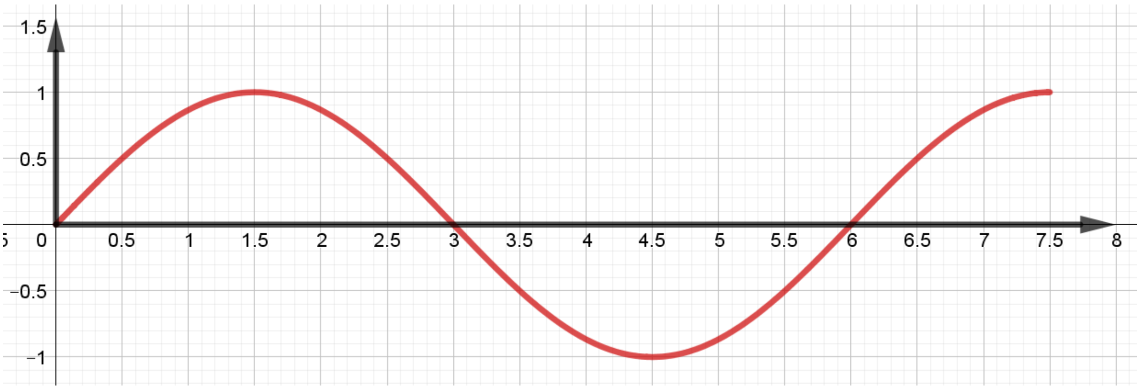
Las siguientes gráficas muestran la distancia recorrida por dos coches en cuatro situaciones distintas.



Describe lo que sucede en cada una de las situaciones (qué coche va más rápido, qué coche va por delante, cuando se adelantan, cuándo se igualan las velocidades).

EJERCICIO 3.

La siguiente gráfica describe el perfil de una superficie con rampas.



Calcula:

a) El desnivel entre el inicio y el final de la rampa.

b) La longitud de la rampa.

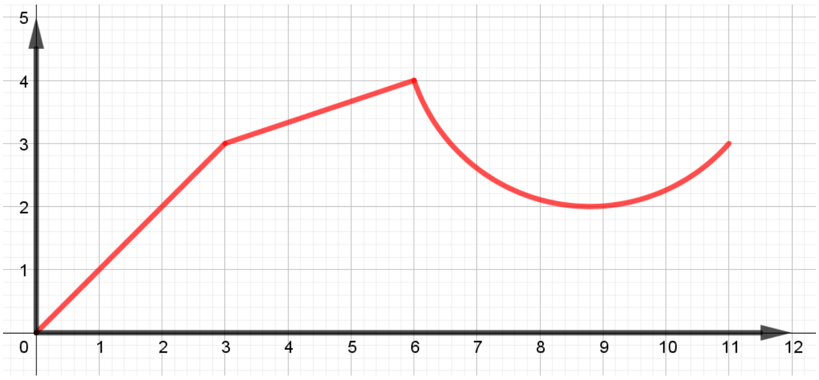
c) La pendiente promedio de la rampa.

d) La pendiente en $x = 1.5$.

e) La pendiente en $x = 3$.

EJERCICIO 4.

La siguiente gráfica describe la gráfica de una función.



a) Calcula la pendiente entre 0 y 3.

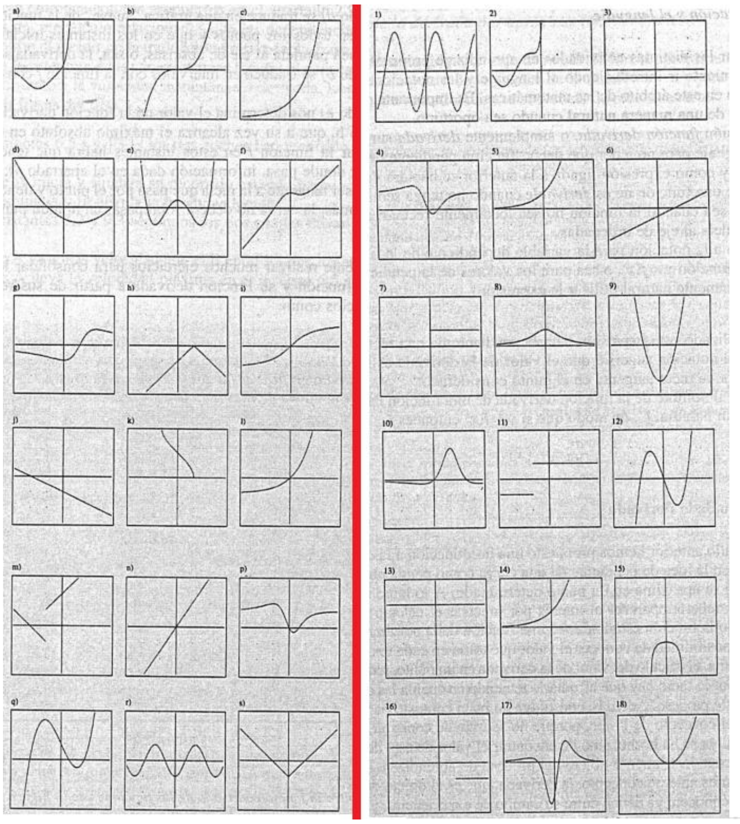
b) Calcula la pendiente entre 3 y 6.

c) Aproxima la pendiente en 6.1, 9 y 11.

d) Haz un boceto de la gráfica de la función pendiente.

EJERCICIO 5. Fuente: (Azcárate et al., 1996)

La siguiente figura muestra la gráfica de dos conjuntos de funciones.



Para cada gráfica de la izquierda, debes encontrar en la derecha la gráfica de su función derivada.